

TD2 : Résolution d'EDPs par minimisation et lemme du col

1. MINIMISATION EN SOUS-CRITIQUE

Soit Ω un ouvert borné régulier connexe de $\mathbb{R}^n$, et soit $a \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$. Soit $q \in [1, \frac{n+2}{n-2}]$ si $n \geq 3$, et $q \geq 1$ si $n = 1, 2$. On cherche à prouver l'existence de $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u + au = u^q & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (E)$$

Dans toute la suite, on suppose que $-\Delta + a$ coercif. On pose

$$m := \inf\{I(v)/v \in N\} \text{ avec } I(v) := \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + au^2) dx \text{ et}$$

$$N := \{u \in H_0^1(\Omega) / \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx = 1\}.$$

3. Soit

$$m := \inf\left\{\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + au^2) dx / u \in N\right\}.$$

En utilisant les inégalités de Sobolev, montrez que m est bien défini et que $m > 0$.

4. Soit $(u_i)_i$ une suite minimisante pour m . Montrez que (u_i) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

5. Montrez qu'il existe une sous-suite $(u_{j(i)})_i$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} u_{j(i)} \rightharpoonup u & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega) \text{ lorsque } i \rightarrow +\infty \\ u_{j(i)} \rightarrow u & \text{fortement dans } L^{q+1}(\Omega) \text{ lorsque } i \rightarrow +\infty \end{cases}$$

On pose $\theta_i := u_{j(i)} - u$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

6. En utilisant la convergence forte et la convergence faible dans les "bons" espaces, montrez que

$$I(u_{j(i)}) = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + au^2) dx + \int_{\Omega} |\nabla \theta_i|^2 dx + o(1) = m + o(1)$$

lorsque $k \rightarrow +\infty$.

7. Montrez que $\int_{\Omega} |u|^{q+1} dx = 1$. Déduisez-en que $m \leq \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + au^2) dx$.

8. Déduisez des deux dernières questions que $m = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + au^2) dx$ et donc que u est un minimiseur de I .

9. Montrez que $\tilde{u} := |u| \in H_0^1(\Omega)$ est aussi un minimiseur de I .

10. En utilisant le théorème des extréma liés, montrez que u est solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta u + au = mu^q & \text{in } \Omega \\ u \geq 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

7. Déduisez-en que $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ et $u > 0$ dans Ω .

8. Déduisez-en une solution de (E) lorsque $q > 1$.

2. COERCIVITÉ ET PREMIÈRE VALEUR PROPRE

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$, et soit $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. On note $\lambda_1(-\Delta + a, \Omega)$ la première valeur propre de $-\Delta + a$ sur Ω (avec condition de Dirichlet au bord). Montrez que

$$-\Delta + a \text{ coercif} \Leftrightarrow \lambda_1(-\Delta + a, \Omega) > 0.$$

3. NON-LINÉARITÉ DÉPENDANT DE LA VARIABLE D'ESPACE

Soit Ω un ouvert borné régulier connexe de $\mathbb{R}^n$, et soit $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. On se donne une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $f \geq 0$ et $f \not\equiv 0$. Soit $q \in [1, \frac{n+2}{n-2}[$ si $n \geq 3$, et $q \geq 1$ si $n = 1, 2$. On cherche à prouver l'existence de $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u + au = fu^q & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (E)$$

1. On suppose qu'une telle solution u existe. On se donne une fonction propre $\varphi > 0$ associée $\lambda_1(-\Delta + a, \Omega)$ (la première valeur propre de $-\Delta + a$). Montrez alors que $\lambda_1(-\Delta + a, \Omega) \int_{\Omega} u\varphi \, dx = \int_{\Omega} fu^q\varphi \, dx$. Déduisez-en qu'une condition nécessaire pour l'existence d'une solution de (E) est $-\Delta + a$ coercif.

Dans toute la suite, on suppose que $-\Delta + a$ coercif.

2. Soit $N_f := \{u \in H_0^1(\Omega) / \int_{\Omega} f|u|^{q+1} \, dx = 1\}$. Montrez que $N_f \neq \emptyset$.

3. Soit

$$m := \inf \left\{ \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + au^2) \, dx / u \in N_f \right\}.$$

Montrez que m est bien défini et que $m > 0$.

4. Soit $(u_i)_i$ une suite minimisante pour m . En utilisant la méthode du premier exercice, montrez qu'il existe $u \in N_f$ telle que, à extraction d'une sous-suite près, $u_i \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$ lorsque $i \rightarrow +\infty$.

5. Montrez qu'on peut supposer que $u \geq 0$.

6. En utilisant le théorème des extréma liés, montrez que u est solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta u + au = mfu^q & \text{in } \Omega \\ u \geq 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

7. Déduisez-en que $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ et $u > 0$.

8. Déduisez-en une solution de (E).

4. UN CAS NON-COERCIF

Soit Ω un ouvert borné régulier connexe de $\mathbb{R}^n$, et soit $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. On se donne une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\mathbf{f} > \mathbf{0}$. Soit $q \in]1, \frac{n+2}{n-2}[$ si $n \geq 3$, et $q > 1$ si $n = 1, 2$. En reprenant la méthode de la section précédente, montrez qu'il existe $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tel qu'il existe $\epsilon \in \{-1, 0, +1\}$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u + au = \epsilon f u^q & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

On n'a pas supposé ici de coercivité.

5. UNE APPLICATION DU LEMME DU COL

Soit Ω un ouvert borné régulier connexe de $\mathbb{R}^2$, et soit $a \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tel que $-\Delta + a$ est coercif. Soit $q > 1$. En utilisant le lemme du col, montrez qu'il existe $u \in C^2(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u + au = u^q + \frac{u^2}{1+u^2} & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

6. MINIMISATION EN CRITIQUE

Soit Ω un ouvert borné régulier connexe de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, et soient $a, f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$. On suppose que

- $-\Delta + a$ est coercif;
- $f(x) > 0$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$

On cherche à prouver l'existence de $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u + au = f u^{2^*-1} & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (E)$$

Pour cela, on va minimiser la fonctionnelle

$$I_f(u) := \frac{\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + au^2) dx}{\left(\int_{\Omega} f|u|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}}} \text{ pour tout } u \in H_0^1(\Omega) - \{0\}.$$

On rappelle qu'il existe une constante

$$K(n) := \frac{4}{n(n-2)\omega_n^{1/n}}$$

telle que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq K(n) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \text{ pour tout } u \in H_0^1(\Omega) - \{0\}.$$

1. En suivant la méthode donnée en cours, donnez une condition suffisante pour avoir une solution faible de (E) par minimisation.
2. On admet qu'une solution faible est en fait forte. Déduisez-en un théorème d'existence de solutions de (E).

7. IDENTITÉ DE POHOZAEV

3. On rappelle l'identité de Pohozaev : pour tout ouvert U , $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned} & \int_U \left((x - x_0)^i \partial_i v + \frac{n-2}{2} v \right) (-\Delta v) \, dx \\ &= \int_{\partial U} \left[(x - x_0, \nu) \left(\frac{|\nabla v|^2}{2} \right) \right] d\sigma - \int_{\partial U} \left[\left((x - x_0)^i \partial_i v + \frac{n-2}{2} v \right) \partial_\nu v \right] d\sigma. \end{aligned}$$

En intégrant par parties, montrez que si en plus $v \geq 0$, alors

$$\int_U (x - x_0)^i \partial_i v f v^{2^*-1} \, dx = \int_{\partial \Omega} f(x - x_0, \nu) \frac{v^{2^*}}{2^*} \, d\sigma - \int_{\Omega} (x, \nabla f(x)) \frac{v^{2^*}}{2^*} \, dx.$$

Déduisez-en une condition suffisante de non-existence de solutions de (E) .

8. FONCTIONS-TEST

On se donne $x_0 \in \Omega$ et $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\eta \equiv 1$ au voisinage de x_0 . En dimension $n > 4$, en utilisant les fonctions-tests

$$U_\epsilon(x) = \eta(x) \left(\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + |x - x_0|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}},$$

donnez une condition suffisante sur a, f pour avoir existence d'une solution de (E) .