

TD3: RÉOLUTION D'EDP CRITIQUES

1. MINIMISATION EN SOUS-CRITIQUE

Soit Ω un ouvert borné régulier connexe de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, et soient $a, f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$. On suppose que

- $-\Delta + a$ est coercif;
- $f(x) > 0$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$

On cherche à prouver l'existence de $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u + au = fu^{2^*-1} & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (E)$$

Pour cela, on va minimiser la fonctionnelle

$$I_f(u) := \frac{\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + au^2) dx}{\left(\int_{\Omega} f|u|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}}} \text{ pour tout } u \in H_0^1(\Omega) - \{0\}.$$

On rappelle qu'il existe une constante

$$K(n) := \frac{4}{n(n-2)\omega_n^{1/n}}$$

telle que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq K(n) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \text{ pour tout } u \in H_0^1(\Omega) - \{0\}.$$

1. En suivant la méthode donnée en cours, donnez une condition suffisante pour avoir une solution faible de (E) par minimisation.
2. On admet qu'une solution faible est en fait forte. Déduisez-en un théorème d'existence de solutions de (E).

2. IDENTITÉ DE POHOZAEV

3. On rappelle l'identité de Pohozaev : pour tout ouvert U , $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned} & \int_U \left((x - x_0)^i \partial_i v + \frac{n-2}{2} v \right) (-\Delta v) dx \\ &= \int_{\partial U} \left[(x - x_0, \nu) \left(\frac{|\nabla v|^2}{2} \right) \right] d\sigma - \int_{\partial U} \left[\left((x - x_0)^i \partial_i v + \frac{n-2}{2} v \right) \partial_\nu v \right] d\sigma. \end{aligned}$$

En intégrant par parties, montrez que si en plus $v \geq 0$, alors

$$\int_U (x - x_0)^i \partial_i v f v^{2^* - 1} dx = \int_{\partial\Omega} f(x - x_0, \nu) \frac{v^{2^*}}{2^*} d\sigma - \int_{\Omega} (x, \nabla f(x)) \frac{v^{2^*}}{2^*} dx.$$

Déduisez-en une condition suffisante de non-existence de solutions de (E) .

3. FONCTIONS-TEST

On se donne $x_0 \in \Omega$ et $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\eta \equiv 1$ au voisinage de x_0 . En dimension $n > 4$, en utilisant les fonctions-tests

$$U_\epsilon(x) = \eta(x) \left(\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + |x - x_0|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}},$$

donnez une condition suffisante sur a, f pour avoir existence d'une solution de (E) .