

Analyse complexe ISN 1A

ENSEM

TD 1 : Fonctions complexes et séries entières

2025-2026

1 Fonctions complexes

Exercice 1

On considère la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{-i\} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto \frac{z-2}{z+i} \end{cases}.$$

Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$ et $f^{-1}(i\mathbb{R})$ et représenter ces ensembles dans le plan complexe.

Exercice 2 (Limites dans le plan complexe)

Les limites de fonctions suivantes existent-elles ?

1. $f : z = x + iy \mapsto \frac{(x + iy)^3}{x^3 + iy^3}$ quand $z \rightarrow 0$
2. $g : z = x + iy \mapsto \frac{xy}{x + iy}$ quand $z \rightarrow 0$
3. $h : z = x + iy \mapsto \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ quand $z \rightarrow ia$, $a \in \mathbb{R}$

Exercice 3

La fonction

$$f : z \mapsto \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{|z|} & \text{si } z \in \mathbb{C}^* \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

est-elle continue sur $\mathbb{C}$?

2 Séries entières

Exercice 4 (Séries entières de la variable réelle)

Développer les fonctions suivantes de la variable réelle en séries entières :

$$x \mapsto \ln(1 + 2x^2), \quad x \mapsto \frac{1}{a - x}, a \neq 0$$

$$x \mapsto \frac{e^x}{1 - x}, \quad x \mapsto \ln(x + a), a \in \mathbb{R}_*^+$$

Exercice 5

Donner les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}, \sum_{n \geq 0} n! z^n, \sum_{n \geq 0} 2^{-n} z^n, \sum_{n \geq 0} z^n, \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}, \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$$

Que dire du comportement des trois dernières séries sur le bord de leur disque de convergence ?

Exercice 6

Soit $\alpha > 0$ et $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$, et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}_+^+$. Donner le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geq 0} a_n^\alpha z^n.$$

Exercice 7

Donner les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n \geq 0} (\ln(n))^2 z^n, \sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n, \sum_{n \geq 0} n^2 z^n, \sum_{n \geq 1} \frac{(n!)}{n^n} z^n, \sum_{n \geq 1} \frac{(1+i)^n}{n 2^n} z^{3n}, \sum_{n \geq 0} z^{n!}, \sum_{n \geq 0} n^{\ln(n)} z^n$$

Exercice 8

Montrer que l'on a

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z-1)^n \text{ sur } D(1, 1) := \{z \in \mathbb{C}^* ; |z-1| < 1\}$$

et

$$\frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)(z+1)^n \text{ sur } D(-1, 1) := \{z \in \mathbb{C}^* ; |z+1| < 1\}$$

Exercice 9

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $r > 0$. Déterminer le rayon de convergence de

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n.$$

Exercice 10 (Principe du prolongement analytique, version faible)

Soit

$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On suppose qu'il existe $0 < r < R$ tel que $f \equiv 0$ sur $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} ; |z - z_0| < r\}$. Montrer que

$$f \equiv 0$$

sur son disque de convergence $D(z_0, R)$.