

Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Il s'agit des équations différentielles les plus courantes en physique. On présente ci-dessous les différentes notations usuelles (formes « *canoniques* ») que l'on trouve, suivant la discipline (maths, mécanique, électricité, automatique, etc.). En mathématiques ces équations sont souvent écrites sous la forme : $y'(x) + ay(x) = c$ (équation du premier ordre) et $y''(x) + ay'(x) + by(x) = c$ (équation du second ordre), où a, b et c sont des constantes. On les appelle « équations *complètes* », ou équations « *avec second membre* », lorsque $c \neq 0$. Les équations *homogènes* correspondantes sont les équations $y'(x) + ay(x) = 0$ et $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$.

Lorsque c est une constante (ce sera presque toujours le cas), ces équations « complètes » ont une solution évidente qui est une **constante**. En effet, si $\forall x, y(x) = \text{const}$, alors $\forall x, y'(x) = 0$ et $y''(x) = 0$. On obtient immédiatement la valeur de cette constante en supprimant les termes en y' et y'' dans l'équation différentielle. Par exemple, si $y'(x) + ay(x) = c$, la solution constante est $y(x) = c/a$.

La solution générale des équations linéaires avec second membre s'obtient en ajoutant la solution constante de l'équation complète à la solution générale de l'équation homogène. Nous considérons donc maintenant uniquement des équations homogènes.

Premier ordre

Maths : $y'(x) + ay(x) = 0$ a pour solutions : $y(x) = Ae^{-ax}$, $A \in \mathbb{R}$.

En physique, la variable est généralement notée t (le temps).

Physique (notation 1) : $y'(t) + \frac{1}{\tau}y(t) = 0$ a pour solutions : $Ae^{-t/\tau}$, $A \in \mathbb{R}$. τ a la dimension d'un

temps (il est parfois appelé *temps caractéristique* du problème).

Physique (notation 2) : $\tau y'(t) + y(t) = 0$ a évidemment les mêmes solutions.

Idée à retenir : il suffit de chercher une solution en exponentielle e^{rt} (où r est une constante).

Deuxième ordre

En physique la variable est le temps : $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$. Idée à retenir : la solution générale de l'équation homogène est la combinaison linéaire de deux solutions indépendantes, que l'on cherche encore sous la forme d'exponentielles e^{rt} , où r est une constante. On tombe alors sur une équation de type polynôme du second degré en r appelée *équation caractéristique*.

La forme des solutions dépend du signe du discriminant Δ de cette équation polynomiale (cf cours de Lionel Béal, encadré ci-contre).



Théorème

Équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$. On appelle *polynôme caractéristique* de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ le polynôme $aX^2 + bX + c$. Notons Δ son discriminant.

Soit S l'ensemble des solutions de $ay'' + by' + cy = 0$, alors

- Si $\Delta \neq 0$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ou $\Delta > 0$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) : soient r_1 et r_2 les racines distinctes de $aX^2 + bX + c$

$$S = \left\{ x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K} \right\} = \text{Vect} \left(x \mapsto e^{r_1 x}, x \mapsto e^{r_2 x} \right).$$

- Si $\Delta = 0$: soit r_0 l'unique racine de $aX^2 + bX + c$

$$S = \left\{ x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{r_0 x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K} \right\} = \text{Vect} \left(x \mapsto e^{r_0 x}, x \mapsto x e^{r_0 x} \right).$$

- Si $\Delta < 0$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) :

Soient $r_1 = r + i\omega$ et $r_2 = r - i\omega$ les racines complexes conjuguées de $aX^2 + bX + c$

$$S = \left\{ x \mapsto (\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)) e^{rx} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(x \mapsto \cos(\omega x) e^{rx}, x \mapsto \sin(\omega x) e^{rx} \right).$$

Suivant la discipline (mécanique, électricité, automatique, etc.), les coefficients a et b sont parfois notés différemment. On écrit alors l'équation différentielle sous une forme dite « canonique », mais qui dépend en réalité de la discipline (et de l'enseignant !).

Exemples :

Notation 1 = cours EC1 et EC2 à la Prépa des INP, on note : $\frac{1}{\omega_0^2} y''(t) + \frac{2\xi}{\omega_0} y'(t) + y(t) = 0$, où ω_0 est appelé « pulsation propre » et ξ (à lire « xi ») est appelé « taux d'amortissement » ou « coefficient d'amortissement ». Ce sont des notations courantes en électricité et en automatique.

On cherche une solution du type e^{rt}

$$\rightarrow \frac{1}{\omega_0^2} r^2 + \frac{2\xi}{\omega_0} r + 1 = 0 \rightarrow r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

Discriminant $\Delta = 4\xi^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1)$

Si $\Delta < 0$, $r = \frac{-2\xi\omega_0 \pm i 2\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}{2}$ soit $r = -\xi\omega_0 \pm i\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}$
 $\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} \triangleq \Omega$

$\rightarrow$ Solution générale $y(t) = e^{-\xi\omega_0 t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$

Si $\Delta = 0$ alors $\xi = 1$ et $y(t) = (At + B) e^{-\omega_0 t}$

Si $\Delta > 0$ alors $r = -\xi\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1} = -\omega_0 [\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}]$

$\rightarrow y(t) = A e^{-\omega_1 t} + B e^{-\omega_2 t}$ avec $\omega_1 = \omega_0 (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})$ et $\omega_2 = \omega_0 (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})$

Avec cette écriture, les trois cas de figure (régime pseudo périodique, critique et amorti) correspondent respectivement à $\xi < 1$, $\xi = 1$ et $\xi > 1$.

Personnellement je ne connais pas par cœur ces solutions, je les retrouve en faisant ce petit calcul.

Notation 2

Le programme officiel des CPGE impose d'introduire plutôt le « facteur de qualité » noté Q . Ce que l'on appelle la forme canonique est alors : $y''(t) + \frac{\omega_0}{Q} y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$. Par rapport aux notations

précédentes, cela revient à poser $Q = \frac{1}{2\xi}$.

Solution en $e^{rt} \rightarrow r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0 \rightarrow \Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left[\frac{1}{Q^2} - 4\right] = (2\omega_0)^2 \left[\frac{1}{4Q^2} - 1\right]$

Si $\Delta < 0$ (ou $Q > \frac{1}{2}$) alors $r = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm i \frac{2\omega_0 \sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}{2}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega$ avec $\Omega \triangleq \omega_0 \sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$

$\rightarrow$ solution $y(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t)$

Si $\Delta = 0$ (soit $Q = \frac{1}{2}$) on trouve de même $y(t) = (At + B) e^{-\omega_0 t}$

Si $\Delta > 0$ ($Q < \frac{1}{2}$) on trouve $y(t) = A e^{r_+ t} + B e^{r_- t}$ avec $r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1-4Q^2}$

Avec ces notations, les trois cas de figure (régime pseudo périodique, critique et amorti) correspondent respectivement à $Q > 1/2$, $Q = 1/2$ et $Q < 1/2$. Ce sont les notations de tous les livres de prépa.

Je ne connais pas non plus par cœur ces solutions.

Notation3

$y''(t) + 2\lambda y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$, forme « canonique » que l'on retrouve dans de nombreux livres universitaires (par exemple Perez, Mécanique, fondements et applications).

Avec ces notations, les trois cas de figure (régime pseudo périodique, critique et amorti) correspondent respectivement à $\lambda < \omega_0$, $\lambda = \omega_0$ et $\lambda > \omega_0$.

Solutions particulières et conditions initiales.

Pour résoudre complètement le problème, il faut déterminer, parmi toutes les solutions de l'équation différentielle complète, celle qui correspond au problème physique posé. Il s'agit souvent des *conditions initiales* (valeurs imposées à $t = 0$).

Exemple : $y'(t) + 2y(t) = 4$. Solution constante $y_0 = 2$. Solution générale de l'équation homogène $y(t) = Ae^{-2t}$. Solution générale de l'équation complète $y(t) = 2 + Ae^{-2t}$: quelle que soit la valeur de A , cette expression est solution de l'équation différentielle complète (avec second membre).

Ensuite on peut déterminer A . Il suffit de connaître y à l'instant $t = 0$. Par exemple si $y(0) = 0$, alors $2 + Ae^{-2 \times 0} = 0$ donc $A = -2$ et $y(t) = 2(1 - e^{-2t})$.

Pour une équation différentielle du second degré, il y a deux constantes à déterminer, donc deux conditions initiales à utiliser.