

0.1. La partie positive. L'objectif est de montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. On définit $u_+(x) = \max\{0, u(x)\}$ et $u_-(x) = \max\{0, -u(x)\}$ pp $x \in \Omega$. Alors $u_+, u_- \in W^{1,p}(\Omega)$ et

$$\partial_i u_+(x) = \mathbf{1}_{\{u(x)>0\}} \partial_i u(x) \text{ et } \partial_i u_-(x) = -\mathbf{1}_{\{u(x)<0\}} \partial_i u(x) \text{ pour pp } x \in \Omega$$

Ici, sachant que $u(x)$ et $\partial_i u(x)$ sont définis pp $x \in \Omega$,

DÉMONSTRATION. Pour $\epsilon > 0$, on définit

$$H_\epsilon(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \sqrt{t^2 + \epsilon^2} - \epsilon & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

On a immédiatement $H_\epsilon \in C^1(\mathbb{R})$ et $H'_\epsilon(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + \epsilon^2}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, de sorte que $|H'_\epsilon(t)| \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il suit alors de la proposition XXX que $H_\epsilon \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$. On se donne $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. On a alors

$$(1) \quad \int_{\Omega} (H_\epsilon \circ u) \partial_i \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \partial_i (H_\epsilon \circ u) \varphi \, dx = - \int_{\Omega} H'_\epsilon(u(x)) \partial_i u \cdot \varphi \, dx$$

Pour presque tout $x \in \Omega$, on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (H_\epsilon \circ u)(x) = u_+(x) \text{ et } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H'_\epsilon(u(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } u(x) < 0 \\ 1 & \text{si } u(x) \geq 0. \end{cases}$$

Sachant que $|H_\epsilon(u)| \leq |u|$ et $|H'_\epsilon(u)| \leq 1$, il suit alors du théorème de convergence dominée que le passage à la limite dans (1) donne

$$\int_{\Omega} u_+ \partial_i \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\{u(x) \geq 0\}} \partial_i u \cdot \varphi \, dx.$$

Et ainsi, $u_+ \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\partial_i u_+ = \mathbf{1}_{\{u(x) \geq 0\}} \partial_i u$ pour tout i . Montrons qu'on peut prendre l'inégalité stricte dans l'indicatrice. Supposons que Ω est borné : ainsi $(u - \alpha) \in W^{1,p}(\Omega)$ pour tout $\alpha > 0$ et

$$(2) \quad \int_{\Omega} (u - \alpha)_+ \partial_i \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\{u(x) \geq \alpha\}} \partial_i u \cdot \varphi \, dx$$

pour tout $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Remarquons que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (u - \alpha)_+(x) = u_+(x) \text{ et } \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathbf{1}_{\{u(x) \geq \alpha\}} = \mathbf{1}_{\{u(x) > 0\}}.$$

En passant à la limite dans (2), on obtient alors

$$\int_{\Omega} u_+ \partial_i \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\{u(x) > 0\}} \partial_i u \cdot \varphi \, dx.$$

Et donc $\partial_i u_+ = \mathbf{1}_{\{u(x) > 0\}} \partial_i u$

□

0.2. Corollaire sur le gradient.

Proposition 2. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Soit $c \in \mathbb{R}$. Alors $\nabla u(x) = 0$ pp $x \in \{y \in \Omega / u(y) = c\}$.

Preuve : quitte à traduire, on peut supposer $c = 0$. Il suit de l'analyse précédente que $\partial_i u_+ = \mathbf{1}_{\{u(x) > 0\}} \partial_i u = \mathbf{1}_{\{u(x) > 0\}} \partial_i u$, et donc $\mathbf{1}_{\{u(x)=0\}} \nabla u(x) = 0$ pp $x \in \Omega$. Du coup, si $x \in \{y \in \Omega / u(y) = 0\}$, on a $\nabla u(x) = 0$ pp x .