

M1 GC : Méthodes et Outils Scientifiques pour l'ingénieur

Albert Giraud

Georessources UMR CNRS 7359, Vandoeuvre -lès-Nancy Cedex, F-54518 France

Abstract

Keywords:

Table des matières

1	Résolution exacte des problèmes aux dérivées partielles	2
1.1	Exercices d'échauffement	2
1.2	Méthode de la décomposition en série	3
1.3	Méthode de la transformation de Laplace	5
1.4	Equations de diffusion couplées : exemple 1	8

1. Résolution exacte des problèmes aux dérivées partielles

1.1. Exercices d'échauffement

1.1.1. Séparation de variables 1

Résoudre le problème suivant à l'aide de la méthode de séparation des variables.

$$u = u(x, y) = f(x)g(y) \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u(x = 0, y) = 8 \exp(-3y) \quad (2)$$

1.1.2. Séparation de variables 2 et superposition des solutions

Résoudre le problème suivant à l'aide de la méthode de séparation des variables et par application du principe de superposition des solutions.

$$u = u(x, y) = f(x)g(y) \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u(x = 0, y) = 8 \exp(-3y) + 4 \exp(-5y) \quad (4)$$

1.1.3. Equation hyperbolique : séparation de variables et superposition des solutions

Résoudre le problème suivant à l'aide de la méthode de séparation des variables et de la méthode de superposition des solutions.

$$y = y(x, t) = f(x)g(t) \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 16 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0 \quad (6)$$

— conditions aux limites

$$y(x = 0, t > 0) = y(x = 2, t > 0) = 0 \quad (7)$$

— conditions initiales

$$\left[\frac{\partial y}{\partial t} \right] (x, t = 0^+) = 0 \quad (8)$$

$$y(x, t = 0^+) = 6 \sin(\pi x) - 3 \sin(4\pi x) \quad (9)$$

1.1.4. Mise sous forme adimensionnelle d'un problème de diffusion transitoire

Soit le problème de diffusion transitoire unidimensionnelle

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0 \quad (10)$$

avec les conditions aux limites

$$\zeta(x = 0, t > 0) = \zeta_u > \zeta_0, \quad \zeta(x = \ell, t > 0) = \zeta_0 \quad (11)$$

et la condition initiale

$$\zeta(x, t = 0) = \zeta_0 \quad (12)$$

Proposer une mise sous forme adimensionnelle.

— suggestion : on commencera par introduire une variable d'espace réduite, comprise entre 0 et 1

$$x' = \frac{x}{\ell} \quad (13)$$

— et on utilisera la règle de dérivation de fonctions composées

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 \quad (14)$$

1.2. Méthode de la décomposition en série

1.2.1. Problème de la consolidation : décomposition en série

Résoudre le problème suivant à l'aide de la méthode de séparation des variables et de la méthode de superposition des solutions.

$$p = p(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (16)$$

— conditions aux limites

$$p(x = 1, t > 0) = 0 \quad (17)$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x} \right] (x = 0, t > 0) = 0 \quad (18)$$

— condition initiale

$$p(x, t = 0^+) = 1 \quad (19)$$

Plan de travail

— rechercher la solution de l'équation (16) sous une forme à variables séparées

$$p(x, t) = f(x) g(t) \quad (20)$$

— en déduire la solution élémentaire vérifiant les équations 16-17-18

— rechercher ensuite la solution du problème complet, incluant la condition initiale (19), sous forme d'une série

— établir la propriété d'orthogonalité de la base des fonctions $\cos\left((1 + 2n)\frac{\pi}{2}x\right)$ vis à vis du produit scalaire sur l'intervalle $[0, 1]$

$$\int_0^1 \cos\left((1 + 2n)\frac{\pi}{2}x\right) \cos\left((1 + 2n')\frac{\pi}{2}x\right) dx = 0 \quad \text{si } n \neq n' \quad (21)$$

$$\int_0^1 \cos\left((1 + 2n)\frac{\pi}{2}x\right) \cos\left((1 + 2n')\frac{\pi}{2}x\right) dx \neq 0 \quad \text{si } n = n' \quad (22)$$

On utilisera

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) + \cos(a + b)) \quad (23)$$

— appliquer la propriété d'orthogonalité au problème posé en transformant l'équation (19) : on multipliera les deux membres de l'égalité par le coefficient $\cos\left((1 + 2n')\frac{\pi}{2}x\right)$ et on intégrera sur l'intervalle $[0, 1]$

— en déduire la solution du problème posé

1.2.2. Couche refroidie aux deux extrémités : décomposition en série

Résoudre le problème adimensionnel d'une couche soumise initialement à une température uniforme et refroidie sur les deux bords

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (24)$$

condition initiale

$$u(x, t = 0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (25)$$

conditions aux limites

$$u(x = 0, t > 0) = u(x = 1, t > 0) = 0 \quad (26)$$

On démontrera la propriété d'orthogonalité de la base des fonctions

$$\sin(n\pi x) \quad (27)$$

sur l'intervalle $[0, 1]$. On utilisera

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b)) \quad (28)$$

1.2.3. Condition initiale linéaire : décomposition en série

Résoudre le problème de diffusion suivant

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (29)$$

condition initiale

$$w(x, t = 0) = x - 1 \quad (30)$$

conditions aux limites

$$w(x = 0, t > 0) = w(x = 1, t > 0) = 0 \quad (31)$$

1.2.4. Analyse transitoire de l'expérience de conduction de Fourier : décomposition en série

Résoudre le problème de diffusion suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (32)$$

condition initiale

$$u(x, t = 0) = 0 \quad (33)$$

conditions aux limites

$$u(x = 0, t > 0) = 1, \quad u(x = 1, t > 0) = 0 \quad (34)$$

qui correspond à l'expérience de Darcy ou Fourier en régime transitoire exprimée sous forme adimensionnelle. On recherchera dans un premier temps la solution stationnaire $v(x)$ du problème

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (35)$$

avec les conditions aux limites

$$v(x = 0) = 1, \quad v(x = 1) = 0 \quad (36)$$

Montrer ensuite que la solution $u(x, t)$ recherchée s'exprime en fonction de la solution $w(x, t)$ de l'exercice précédent sous la forme

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x) \quad (37)$$

1.2.5. Vibration d'une corde tendue pincée en son milieu et lâchée à vitesse nulle

Soit le problème adimensionnel de vibration d'une corde de longueur unité

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (38)$$

— **Conditions initiales.** A $t = 0$ la corde est abandonnée à vitesse nulle et sa position est celle d'une corde tendue pincée en son milieu

$$u(x, t = 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = 0 \quad (39)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = 0 \quad (40)$$

avec

$$\varphi(x) = 2\delta x, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad ; \quad \varphi(x) = 2\delta(1-x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \quad (41)$$

δ est la hauteur réduite initiale ($t = 0$) du milieu de la corde (hauteur initiale h du milieu de la corde divisée par sa longueur ℓ , $\delta = h/\ell$)

— **Conditions aux limites.** La corde est fixée aux deux extrémités

$$u(x = 0, t) = 0 \quad , \quad u(x = 1, t) = 0 \quad , \quad \forall t \geq 0 \quad (42)$$

On suggère le plan de travail suivant :

— adopter la méthode de séparation des variables

$$u(x, t) = f(x)g(t) \quad (43)$$

que l'on remplace dans l'équation hyperbolique (38) pour en déduire la forme de la solution élémentaire. Il reste ensuite à vérifier les conditions supplémentaires (conditions initiales et aux limites).

— montrer que la solution des équations (38-42-40) est de la forme

$$u_n(x, t) = A_n \sin(n\pi x) \cos(n\pi t) \quad (44)$$

— rechercher ensuite la solution de la condition initiale (39-41) sous la forme d'une série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin(n\pi x) \cos(n\pi t) \quad (45)$$

— utiliser la propriété d'orthogonalité de la base des fonctions $\sin(n\pi x)$ sur $[0, 1]$ et montrer que la solution est de la forme

$$u(x, t) = \frac{8\delta}{\pi^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin((2n+1)\pi x) \cos((2n+1)\pi t) \quad (46)$$

1.3. Méthode de la transformation de Laplace

1.3.1. Analyse transitoire de l'expérience de conduction de Fourier : transformation de Laplace

Appliquer la transformation de Laplace à l'ensemble des équations

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (47)$$

$$u(x, t = 0) = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (48)$$

$$u(x = 0, t > 0) = 1, \quad u(x = 1, t > 0) = 0 \quad (49)$$

On note $\bar{u}$ la transformée de Laplace de u et s le paramètre de Laplace :

$$\mathcal{L}[u(x, t)] = \bar{u}(x, s) = \int_0^\infty u(x, t) \exp(-st) dt \quad (50)$$

on rappelle

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = s\bar{u}(x, s) - u(x, t = 0) \quad (51)$$

Pour l'inversion de la transformée de Laplace, on fournit

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\exp(-qx)}{s}\right] = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \quad (52)$$

avec

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) \quad , \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\xi^2) d\xi \quad (53)$$

et le développement en série entière de

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , \quad |x| < 1 \quad (54)$$

1.3.2. Température imposée en paroi d'un massif semi infini : transformation de Laplace

Soit le problème caractérisé par les équations

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad 0 \leq x \leq \infty \quad (55)$$

condition initiale

$$u(x, t = 0) = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq \infty \quad (56)$$

conditions aux limites

$$u(x = 0, t > 0) = \varphi(t) \quad (57)$$

$$u(x \rightarrow \infty, t > 0) = 0 \quad (58)$$

— Poser le problème dans l'espace des transformées de Laplace. Soit

$$\bar{\varphi}(s) = \mathcal{L}[\varphi(t)] = \int_0^\infty \varphi(t) \exp(-st) dt \quad (59)$$

Montrer que la solution dans l'espace transformé de Laplace s'exprime sous la forme

$$\bar{u}(x, s) = \bar{\varphi}(s) \exp(-\sqrt{s}x) \quad (60)$$

— Résoudre dans le cas d'une température imposée constante : exprimer la solution $u(x, t)$ dans le cas

$$\varphi(t) = 1 \quad , \quad 0 < t \leq \infty \quad (61)$$

On utilisera la table d'inversion

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\exp(-\sqrt{s}x)}{s} \right] = \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \quad (62)$$

— Résoudre dans le cas d'une température imposée exponentiellement décroissante : exprimer la solution $u(x, t)$ dans le cas

$$\varphi(t) = \exp(-\alpha t) \quad , \quad 0 < t \leq \infty \quad (63)$$

On utilisera la table d'inversion

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\exp(-\sqrt{s}x)}{s - \alpha} \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \exp(\alpha t) \left(\exp(-\sqrt{\alpha}x) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} - \sqrt{\alpha t} \right) + \exp(\sqrt{\alpha}x) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} + \sqrt{\alpha t} \right) \right) \end{aligned} \quad (64)$$

avec les correspondances

$$\alpha \rightarrow -\alpha, \quad \sqrt{\alpha} \rightarrow i\sqrt{\alpha} \quad (65)$$

On introduit la fonction erreur complémentaire de la variable complexe :

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\xi^2) d\xi \quad (66)$$

dont on rappelle les propriétés (la barre de surlignement désigne le complexe conjugué dans la relation 68)

$$\operatorname{erfc}(z) + \operatorname{erfc}(-z) = 2 \quad (67)$$

$$\operatorname{erfc}(\bar{z}) = \overline{\operatorname{erfc}(z)}, \quad z = a + ib, \quad \bar{z} = a - ib \quad (68)$$

1.3.3. Diffusion stationnaire avec transport convectif

Soit le problème de diffusion stationnaire avec transport convectif

$$\frac{d^2v}{dx^2} - \lambda \frac{dv}{dx} = 0 \quad (69)$$

$$v(x=0) = 1, \quad v(x=1) = 0 \quad (70)$$

λ est un nombre adimensionnel, le nombre de Péclet. Exprimer la solution stationnaire $v(x)$. On pourra résoudre l'équation différentielle à l'aide de la méthode de la variation de la constante.

1.3.4. Diffusion transitoire avec transport convectif : résolution par transformation de Laplace

Appliquer la transformation de Laplace à l'ensemble des équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \\ u(x, t=0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(x=0, t>0) &= 1 - \exp(-\beta t) \\ u(x=1, t>0) &= 0 \end{aligned} \quad (71)$$

1.3.5. Température dans une sphère creuse : résolution par transformation de Laplace

Problème posé : on considère une sphère creuse, de rayon intérieur a et de rayon extérieur b , à température initiale uniforme ($t=0$). A l'instant $t=0^+$ une température constante u_a est imposée à la paroi intérieure $r=a$, la paroi extérieure $r=b$ étant maintenue à température constante égale à la température initiale. Le problème à résoudre est à symétrie radiale.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (72)$$

Mettre sous forme adimensionnelle avec

$$r' = \frac{r}{a}, \quad \rho = \frac{b}{a}, \quad u' = \frac{u}{u_a} \quad (73)$$

$$\tau = \frac{a^2}{4D}, \quad t' = \frac{t}{\tau} \quad (74)$$

et résoudre par transformation de Laplace/

1.3.6. Température dans une sphère pleine : résolution par transformation de Laplace

Résoudre à l'aide de la méthode de la transformation de Laplace le problème de diffusion adimensionnel ($0 \leq r \leq 1$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - 4 \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (75)$$

$$u(r, t=0) = 0, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (76)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r=0, t>0) = 0, \quad u(r=1, t>0) = 1 \quad (77)$$

1. Poser le problème dans l'espace transformé de Laplace.

2. Montrer, en posant

$$\bar{u} = \frac{\bar{v}}{r} \quad (78)$$

que l'équation différentielle à résoudre, dans l'espace transformé de Laplace, s'écrit

$$\frac{d^2 \bar{v}}{dr^2} - 4s \bar{v} = 0 \quad (79)$$

En posant $q = \sqrt{s}$

$$\bar{u} = A \frac{\exp(2qr)}{r} + B \frac{\exp(-2qr)}{r} \quad (80)$$

3. Sur la base du développement en série entière, valable pour toute valeur de x

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (81)$$

montrer que la condition en $r = 0$ est vérifiée avec $B = -A$ et que la solution est de la forme

$$\bar{u} = A \frac{\sinh(2qr)}{r} \quad (82)$$

4. Exprimer la condition aux limites en $r = 1$ et montrer précisément que la solution, dans l'espace transformé de Laplace, est de la forme

$$\bar{u}(r, s) = \frac{1}{r} \frac{\sinh(2qr)}{s \sinh(2q)} \quad (83)$$

5. Utiliser le développement en série entière (valable pour $|x| < 1$)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \quad (84)$$

ainsi que la table d'inversion

$$\bar{f}(s) = \frac{\exp(-qr)}{s}, \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(s)] = \operatorname{erfc}\left[\frac{r}{2\sqrt{t}}\right] \quad (85)$$

pour exprimer la solution $u(r, t)$ sous la forme d'une série.

1.4. Equations de diffusion couplées : exemple 1

1.4.1. Problème posé

Soit le problème aux dérivées partielles

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ 0 & \lambda_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \quad (86)$$

Conditions initiales

$$u_1(x, t = 0) = 0, \quad u_2(x, t = 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq a \quad (87)$$

Conditions aux limites

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(x = 0, t > 0) = 0, \quad u_1(x = a, t > 0) = u_1^a \quad (88)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}(x = 0, t > 0) = 0, \quad u_2(x = a, t > 0) = u_2^a \quad (89)$$

1. Exprimer la matrice de couplage $\mathbf{A}$ telle que

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{\lambda} \quad (90)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ 0 & \lambda_{22} \end{pmatrix} \quad (91)$$

2. Soit le système d'équations aux dérivées partielles couplées

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \quad (92)$$

Diagonaliser la matrice $\mathbf{A}$. En notant a_1 et a_2 ses valeurs propres

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1} \quad (93)$$

En posant

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x, t) \\ \psi_2(x, t) \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix} \quad (94)$$

Exprimer le système aux dérivées partielles à résoudre sous une forme découplée. En déduire la solution recherchée.

Références