

M1 GC, Méthodes et Outils Scientifiques, Session 1, 2024-2025, 2 heures

albert.giraud@univ-lorraine.fr

Sans Document (téléphone et calculatrice non autorisés)

1 Analyse tensorielle (14 points)

La convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés est systématiquement adoptée (une indication sera faite dans le cas contraire). On se place dans l'espace de dimension 3, les indices répétés sont sommés de 1 à 3 dans les formules développées (exemple, l'expression développée de $a_i b_i$ est $a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$). *Tout résultat introduit sans justification ne sera pas pris en compte.*

1.1 Produits contractés

Calculer

$$\mathbb{J} : \mathbb{J}, \quad \mathbb{I} : \mathbb{I}, \quad \mathbb{I} : \mathbb{J} \quad (1)$$

$$\mathbb{J} :: \mathbb{J}, \quad \mathbb{I} :: \mathbb{I}, \quad \mathbb{I} :: \mathbb{J} \quad (2)$$

Indication : pour les relations (1), exprimer la composante $ijkl$ du tenseur d'ordre 4 obtenu par produit doublement contracté (exemple $[\mathbb{J} : \mathbb{J}]_{ijkl} = J_{ijop} J_{pokl}$, etc.).

1.2 Etude des tenseurs du second ordre

Soit $\mathbf{a}$ un tenseur du second ordre, *non supposé symétrique*, démontrer l'identité

$$\mathbf{a} : \mathbf{a} = \mathbf{i} : (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \quad (3)$$

1.2.1 Projecteurs $\mathbb{I}, \mathbb{J}, \mathbb{K}$

Calculer

$$\mathbb{I} : \mathbf{a}, \quad \mathbb{J} : \mathbf{a} \quad (4)$$

en déduire $\mathbb{K} : \mathbf{a}$ et commenter les résultats. Détailler le cas particulier d'un tenseur $\mathbf{a}$ symétrique ($\mathbf{a} = {}^t \mathbf{a}$, $a_{ji} = a_{ij}$)

1.2.2 Application

On suppose dans ce qui suit $\mathbf{a}$ tenseur du second ordre symétrique ($\mathbf{a} = {}^t \mathbf{a}$, $a_{ji} = a_{ij}$). On note $\mathbf{a}^{\text{sph}}$ (partie sphérique du tenseur du second ordre $\mathbf{a}$) et $\mathbf{a}^{\text{dev}}$ (partie déviatorique du tenseur du second ordre $\mathbf{a}$)

$$\mathbf{a}^{\text{sph}} = \mathbb{J} : \mathbf{a}, \quad \mathbf{a}^{\text{dev}} = \mathbb{K} : \mathbf{a} \quad (5)$$

Exprimer $\mathbf{a}^{\text{sph}}$ et $\mathbf{a}^{\text{dev}}$ dans les cas particuliers suivants

$$\mathbf{a} = \alpha (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) \quad (6)$$

$$\mathbf{a} = \alpha (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) \quad (7)$$

$$\mathbf{a} = \alpha (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \quad (8)$$

$$\mathbf{a} = \alpha (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 - 2 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \quad (9)$$

$$\mathbf{a} = \alpha (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) \quad (10)$$

1.3 Dérivation

1.3.1 Invariants I_1, I_2, I_3

On suppose dans ce qui suit $\mathbf{a}$ tenseur du second ordre *non nécessairement symétrique*. Exprimer sous forme indicielle les invariants de $\mathbf{a}$

$$I_1 = \mathbf{i} : \mathbf{a}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \mathbf{a} : \mathbf{a}, \quad I_3 = \frac{1}{3} \mathbf{i} : (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \quad (11)$$

Exprimer sous forme développée I_1 et I_2 (expression développée de I_3 non demandée).

1.3.2 Dérivation des invariants I_1, I_2, I_3

Calculer

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{a}}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{a}}, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{a}} \quad (12)$$

Rappel : exprimer la composante ij du tenseur d'ordre 2, exemple :

$$\left[\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{a}} \right]_{ij} = \frac{\partial I_1}{\partial a_{ij}}, \quad \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial I_1}{\partial a_{ij}} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (13)$$

Donner les relations dans le cas général, et en déduire les relations particulières dans le cas particulier d'un tenseur symétrique ($\mathbf{a} = {}^t\mathbf{a}$, $a_{ji} = a_{ij}$)

1.3.3 Exercice de dérivation

Soient $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ tenseurs du second ordre, démontrer la relation :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} (tr \mathbf{a} \, tr[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}]) = tr[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}] \mathbf{i} + tr \mathbf{a} \, {}^t\mathbf{b} \quad (14)$$

1.3.4 Application au modèle plastique de Drucker Prager

Suggestion : traiter cet exercice en dernier, suivant le temps disponible. Il ne sera pas pris en compte pour la validation de l'UE, mais seulement pour départager les meilleures copies.
Soient $\boldsymbol{\sigma}$ un tenseur du second ordre symétrique, et les fonctions $f(\boldsymbol{\sigma})$ et $g(\boldsymbol{\sigma})$

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq} + \beta_0 (\sigma_m - C_0) \quad , \quad g(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq} + \alpha_0 \sigma_m \quad (15)$$

avec

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{i} = \frac{\sigma_{ii}}{3} \quad (16)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji}, \quad , \quad \sigma_{eq} = \sqrt{3 J_2} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ji}} \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \mathbf{i} + \mathbf{s} \quad , \quad \sigma_m \mathbf{i} = \mathbb{J} : \boldsymbol{\sigma} \quad , \quad \mathbf{s} = \mathbb{K} : \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \mathbf{i} \quad (18)$$

Calculer

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (19)$$

En déduire

$$H_0 = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \text{avec} \quad \mathbb{C} = 3 k \mathbb{J} + 2 \mu \mathbb{K} \quad (20)$$

2 Equations différentielles et aux dérivées partielles (6 points)

2.1 Equations différentielles d'Euler

Déterminer les solutions des équations différentielles d'Euler (poser dans chaque cas $f(r) = r^\alpha$)

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + 2r \frac{df}{dr} - 2f = 0 \quad (21)$$

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + r \frac{df}{dr} - f = 0 \quad (22)$$

$$r^4 \frac{d^4 f}{dr^4} + 2r^3 \frac{d^3 f}{dr^3} - 3r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + 3r \frac{df}{dr} - 3f = 0 \quad (23)$$

2.2 Equation différentielle linéaire homogène à coefficients constants

Résoudre l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 3 à coefficients constants (poser $f(x) = \exp(\alpha x)$)

$$f^{(3)}(x) - 4f^{(2)}(x) + 9f^{(1)}(x) - 10f(x) = 0 \quad (24)$$

3 Formulaires et rappels

3.1 Formulaire et rappels pour l'analyse tensorielle

δ_{ij} représente le symbole de Kronecker ($\delta_{ji} = \delta_{ij}$), ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ sinon)
Tenseur identité d'ordre 2

$$\mathbf{i} = \delta_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j, \quad i_{ij} = \delta_{ij} \quad (25)$$

Produits contractés

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_{ik} b_{kj} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (26)$$

$$\mathbf{a} : \mathbf{b} = a_{ij} b_{ji}, \quad \mathbb{A} :: \mathbb{B} = A_{ijkl} B_{lkji}, \quad \mathbb{A} : \mathbb{B} = A_{ijop} B_{pokl} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \quad (27)$$

$$\mathbb{A} : \mathbf{b} = A_{ijkl} b_{lk} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (28)$$

$$tra \mathbf{a} = \mathbf{a} : \mathbf{i} = \mathbf{i} : \mathbf{a} \quad (29)$$

$\mathbb{I}, \mathbb{J}, \mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ tenseurs d'ordre quatre, de composantes

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad J_{ijkl} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad K_{ijkl} = I_{ijkl} - J_{ijkl} \quad (30)$$

Dérivation

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial f}{\partial a_{ij}} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} \right]_{ij} = \frac{\partial f}{\partial a_{ij}} \quad (31)$$

$$\frac{\partial a_{kl}}{\partial a_{ij}} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (32)$$

$$\delta_{ik} \delta_{jk} = \delta_{ki} \delta_{jk} = \delta_{ik} \delta_{kj} = \delta_{ki} \delta_{kj} = \delta_{ij} \quad (33)$$

3.2 Equation différentielle linéaire d'ordre N à coefficients constants

Soit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants, d'ordre n

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + a_2 y^{(n-2)}(x) + \dots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = 0 \quad (34)$$

On en recherche des solutions particulières sous la forme

$$y(x) = \exp(\alpha x) \quad (35)$$

d'où l'équation auxiliaire d'ordre n

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0 \quad (36)$$

Une discussion générale porte ensuite sur les n racines de l'équation 36, de leur ordre de multiplicité

- [1] à chaque racine réelle α_i simple correspond la solution particulière $\exp(\alpha_i x)$
- [2] à chaque paire de racines complexes conjuguées $\alpha_1 = \lambda + i\beta$ et $\alpha_2 = \lambda - i\beta$ correspond deux solutions particulières $\exp(\lambda x) \cos(\beta x)$ et $\exp(\lambda x) \sin(\beta x)$
- [3] à chaque racine réelle α_i d'ordre r , correspond r solutions particulières indépendantes

$$\exp(\alpha_i x) \quad , \quad x \exp(\alpha_i x) \quad , \dots, x^{r-1} \exp(\alpha_i x) \quad (37)$$

- [4] à chaque paire de racines complexes conjuguées $\alpha_1 = \lambda + i\beta$ et $\alpha_2 = \lambda - i\beta$ d'ordre μ correspond 2μ solution particulières

$$\exp(\lambda x) \cos(\beta x) \quad , \quad x \exp(\lambda x) \cos(\beta x) \quad , \dots, x^{\mu-1} \exp(\lambda x) \cos(\beta x) \quad (38)$$

$$\exp(\lambda x) \sin(\beta x) \quad , \quad x \exp(\lambda x) \sin(\beta x) \quad , \dots, x^{\mu-1} \exp(\lambda x) \sin(\beta x) \quad (39)$$

3.3 Equation différentielle d'Euler

Une équation différentielle d'Euler est du type

$$x^n y^{(n)}(x) + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} x y'(x) + a_n y(x) = 0 \quad (40)$$

On cherche la solution sous la forme $y(x) = x^\alpha$ d'où l'équation déterminante

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1) + a_1 \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+2) + \dots + a_n = 0 \quad (41)$$

La solution est (dans le cas de n racines réelles distinctes α_i)

$$y(x) = C_1 x^{\alpha_1} + C_2 x^{\alpha_2} + C_3 x^{\alpha_3} + \dots + C_n x^{\alpha_n} \quad (42)$$

Si α_i est une racine réelle d'ordre m , de l'équation caractéristique, les m solutions indépendantes relatives à α_i s'écrivent

$$y_1 = C_1 x^{\alpha_i}, \quad y_2 = C_2 x^{\alpha_i} \ln x, \quad \dots, y_m = C_m x^{\alpha_i} (\ln x)^{m-1} \quad (43)$$

M1 GC, Méthodes et Outils Scientifiques, Session 2, 2024-2025, 2 heures

albert.giraud@univ-lorraine.fr

Sans Document (téléphone et calculatrice non autorisés)

1 Diffusion 1D linéaire transitoire : résolution par séparation de variable et construction d'une série (8 points)

Résoudre le problème aux dérivées partielles suivant, équation parabolique 1D avec conditions initiales et aux limites, à l'aide de la méthode de séparation des variables et de la méthode de superposition des solutions.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < 2 \quad (1)$$

$$p(x, t = 0^+) = kx, \quad 0 < x < 2 \quad (2)$$

$$p(x = 0, t > 0) = 0, \quad p(x = 2, t > 0) = 0 \quad (3)$$

Démontrer l'orthogonalité des fonctions $\sin \left[(1+n) \frac{\pi}{2} x \right]$ sur l'intervalle $[0, 2]$ et construire la solution sous la forme d'une série. Rappel de l'orthogonalité

$$\int_{x=0}^2 \sin \left[(1+n) \frac{\pi}{2} x \right] \sin \left[(1+n') \frac{\pi}{2} x \right] dx = 0, \quad \text{si } n \neq n' \quad (4)$$

$$\int_{x=0}^2 \sin \left[(1+n) \frac{\pi}{2} x \right] \sin \left[(1+n') \frac{\pi}{2} x \right] dx = \alpha, \quad \text{si } n = n' \quad (5)$$

On utilisera $\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) + \cos(a+b))$ ou $\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$.

2 Analyse tensorielle (12 points)

La convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés est systématiquement adoptée (une indication sera faite dans le cas contraire). On se place dans l'espace de dimension 3, les indices répétés sont sommés de 1 à 3 dans les formules développées (exemple, l'expression développée de $a_i b_i$ est $a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$). *Tout résultat introduit sans justification ne sera pas pris en compte.*

2.1 Produits contractés et produits tensoriels

Soient α, β, γ des tenseurs d'ordre deux, et $\mathbb{C}$ un tenseur d'ordre quatre. Préciser l'ordre et exprimer la composante du tenseur

$$(\mathbb{C} : \gamma \otimes \alpha : \mathbb{C}) : \beta \quad (6)$$

2.2 Etude des tenseurs du second ordre

Soit $\mathbf{a}$ un tenseur du second ordre, *non supposé symétrique*, démontrer l'identité

$$\mathbf{a} : \mathbf{a} = \mathbf{i} : (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \quad (7)$$

2.2.1 Projecteurs $\mathbb{I}$, $\mathbb{J}$, $\mathbb{K}$

Calculer

$$\mathbb{I} : \mathbf{a}, \quad \mathbb{J} : \mathbf{a} \quad (8)$$

en déduire $\mathbb{K} : \mathbf{a}$ et commenter les résultats. Détailler le cas particulier d'un tenseur $\mathbf{a}$ symétrique ($\mathbf{a} = {}^t\mathbf{a}$, $a_{ji} = a_{ij}$)

2.3 Dérivation

2.3.1 Invariants I_1, I_2, I_3

On suppose dans ce qui suit $\mathbf{a}$ tenseur du second ordre *non nécessairement symétrique*. Exprimer sous forme indicielle les invariants de $\mathbf{a}$

$$I_1 = \mathbf{i} : \mathbf{a}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \mathbf{a} : \mathbf{a}, \quad I_3 = \frac{1}{3} \mathbf{i} : (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \quad (9)$$

Exprimer sous forme développée I_1 et I_2 (expression développée de I_3 non demandée).

2.3.2 Dérivation des invariants I_1, I_2, I_3

Calculer

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{a}}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{a}}, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{a}} \quad (10)$$

Rappel : exprimer la composante ij du tenseur d'ordre 2, exemple :

$$\left[\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{a}} \right]_{ij} = \frac{\partial I_1}{\partial a_{ij}}, \quad \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial I_1}{\partial a_{ij}} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (11)$$

Donner les relations dans le cas général, et en déduire les relations particulières dans le cas particulier d'un tenseur symétrique ($\mathbf{a} = {}^t\mathbf{a}$, $a_{ji} = a_{ij}$)

2.3.3 Exercice de dérivation

Soient $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ tenseurs du second ordre, démontrer la relation :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} (tr \mathbf{a} \, tr[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}]) = tr[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}] \mathbf{i} + tr \mathbf{a} \, {}^t\mathbf{b} \quad (12)$$

2.3.4 Application au modèle plastique de Drucker Prager

Soient $\boldsymbol{\sigma}$ un tenseur du second ordre symétrique, et les fonctions $f(\boldsymbol{\sigma})$ et $g(\boldsymbol{\sigma})$

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq} + \beta_0 (\sigma_m - C_0) \quad , \quad g(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq} + \alpha_0 \sigma_m \quad (13)$$

avec

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{i} = \frac{\sigma_{ii}}{3} \quad (14)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji}, \quad , \quad \sigma_{eq} = \sqrt{3 J_2} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ji}} \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \mathbf{i} + \mathbf{s} \quad , \quad \sigma_m \mathbf{i} = \mathbb{J} : \boldsymbol{\sigma} \quad , \quad \mathbf{s} = \mathbb{K} : \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \mathbf{i} \quad (16)$$

Calculer

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (17)$$

En déduire

$$H_0 = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \text{avec} \quad \mathbb{C} = 3k \mathbb{J} + 2\mu \mathbb{K} \quad (18)$$

3 Formulaires et rappels

3.1 Formulaire et rappels pour l'analyse tensorielle

δ_{ij} représente le symbole de Kronecker ($\delta_{ji} = \delta_{ij}$), ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ sinon)
Tenseur identité d'ordre 2

$$\mathbf{i} = \delta_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j, \quad i_{ij} = \delta_{ij} \quad (19)$$

Produits contractés

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_{ik} b_{kj} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (20)$$

$$\mathbf{a} : \mathbf{b} = a_{ij} b_{ji}, \quad \mathbb{A} :: \mathbb{B} = A_{ijkl} B_{lkji}, \quad \mathbb{A} : \mathbb{B} = A_{ijop} B_{pokl} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \quad (21)$$

$$\mathbb{A} : \mathbf{b} = A_{ijkl} b_{lk} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (22)$$

$$\text{tra} \mathbf{a} = \mathbf{a} : \mathbf{i} = \mathbf{i} : \mathbf{a} \quad (23)$$

$\mathbb{I}, \mathbb{J}, \mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ tenseurs d'ordre quatre, de composantes

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad J_{ijkl} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad K_{ijkl} = I_{ijkl} - J_{ijkl} \quad (24)$$

Dérivation

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial f}{\partial a_{ij}} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} \right]_{ij} = \frac{\partial f}{\partial a_{ij}} \quad (25)$$

$$\frac{\partial a_{kl}}{\partial a_{ij}} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (26)$$

$$\delta_{ik} \delta_{jk} = \delta_{ki} \delta_{jk} = \delta_{ik} \delta_{kj} = \delta_{ki} \delta_{kj} = \delta_{ij} \quad (27)$$

3.2 Equation différentielle linéaire d'ordre N à coefficients constants

Soit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants, d'ordre n

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + a_2 y^{(n-2)}(x) + \dots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = 0 \quad (28)$$

On en recherche des solutions particulières sous la forme

$$y(x) = \exp(\alpha x) \quad (29)$$

d'où l'équation auxiliaire d'ordre n

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0 \quad (30)$$

Une discussion générale porte ensuite sur les n racines de l'équation 30, de leur ordre de multiplicité

- [1] à chaque racine réelle α_i simple correspond la solution particulière $\exp(\alpha_i x)$
- [2] à chaque paire de racines complexes conjuguées $\alpha_1 = \lambda + i\beta$ et $\alpha_2 = \lambda - i\beta$ correspond deux solutions particulières $\exp(\lambda x) \cos(\beta x)$ et $\exp(\lambda x) \sin(\beta x)$
- [3] à chaque racine réelle α_i d'ordre r , correspond r solutions particulières indépendantes

$$\exp(\alpha_i x), \quad x \exp(\alpha_i x), \quad \dots, x^{r-1} \exp(\alpha_i x) \quad (31)$$

- [4] à chaque paire de racines complexes conjuguées $\alpha_1 = \lambda + i\beta$ et $\alpha_2 = \lambda - i\beta$ d'ordre μ correspond 2μ solution particulières

$$\exp(\lambda x) \cos(\beta x), \quad x \exp(\lambda x) \cos(\beta x), \quad \dots, x^{\mu-1} \exp(\lambda x) \cos(\beta x) \quad (32)$$

$$\exp(\lambda x) \sin(\beta x), \quad x \exp(\lambda x) \sin(\beta x), \quad \dots, x^{\mu-1} \exp(\lambda x) \sin(\beta x) \quad (33)$$

3.3 Equation différentielle d'Euler

Une équation différentielle d'Euler est du type

$$x^n y^{(n)}(x) + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} x y'(x) + a_n y(x) = 0 \quad (34)$$

On cherche la solution sous la forme $y(x) = x^\alpha$ d'où l'équation déterminante

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1) + a_1 \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+2) + \dots \\ + a_{n-1} \alpha + a_n = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

La solution est (dans le cas de n racines réelles distinctes α_i)

$$y(x) = C_1 x^{\alpha_1} + C_2 x^{\alpha_2} + C_3 x^{\alpha_3} + \dots + C_n x^{\alpha_n} \quad (36)$$

Si α_i est une racine réelle d'ordre m , de l'équation caractéristique, les m solutions indépendantes relatives à α_i s'écrivent

$$y_1 = C_1 x^{\alpha_i}, \quad y_2 = C_2 x^{\alpha_i} \ln x, \quad \dots, y_m = C_m x^{\alpha_i} (\ln x)^{m-1} \quad (37)$$

Master Génie Civil - M1
Examen Outils Mathématiques pour l'Ingénieur
Session 2, 2023-2024, 2 Heures - Sans Document (téléphone -
calculatrice non autorisés)

1 Equations différentielles (10 points)

1.1 Problème

Résoudre l'équation différentielle d'Euler

$$x^3 g^{(3)}(x) - 8x g^{(1)}(x) + 8g(x) = 0 \quad (1)$$

Rappel : on recherche la solution sous la forme $g(x) = x^\alpha$.

1.2 Problème

Résoudre l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 4 à coefficients constants (on recherchera la solution sous la forme $f(x) = \exp(\alpha x)$)

$$f^{(4)}(x) - 8f^{(3)}(x) + 15f^{(2)}(x) + 8f^{(1)}(x) - 16f(x) = 0 \quad (2)$$

1.3 Problème

Résoudre l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 3 à coefficients constants (on recherchera la solution sous la forme $f(x) = \exp(\alpha x)$)

$$f^{(3)}(x) - 4f^{(2)}(x) + 9f^{(1)}(x) - 10f(x) = 0 \quad (3)$$

1.4 Problème

Soit l'équation différentielle d'Euler d'ordre 2

$$x^2 y^{(2)}(x) + \alpha_1 x y^{(1)}(x) + \alpha_2 y(x) = 0 \quad (4)$$

avec $r_1 = r_2$ racine double de l'équation déterminante (obtenue avec $y(x) = x^r$)

$$r(r-1) + \alpha_1 r + \alpha_2 = r^2 + (\alpha_1 - 1)r + \alpha_2 = 0 \quad (5)$$

On a dans ce cas

$$r_1^2 + (\alpha_1 - 1)r_1 + \alpha_2 = 0, \quad (\alpha_1 - 1)^2 = 4\alpha_2, \quad r_1 = r_2 = \frac{1 - \alpha_1}{2} \quad (6)$$

Soit $y_1(x) = C_1 x^{r_1}$ solution de l'équation (4). Rechercher la deuxième solution sous la forme

$$y_2(x) = u(x)x^{r_1} \quad (7)$$

2 Equation de diffusion 1D : résolution par transformation de Laplace (10 points)

2.1 Problème 1

Soit le problème aux dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, t=0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad u(x=0, t>0) = u_0, \quad u(x=\infty, t>0) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

2.2 Résolution dans l'espace transformé de Laplace

Commenter le problème physique posé. Appliquer la transformation de Laplace à l'ensemble des équations du problème. Exprimer l'équation différentielle à résoudre pour la fonction $\bar{u}$ et donner sa solution (on posera $q = \sqrt{s}$).

$$\mathcal{L}[u(x, t)] = \bar{u}(x, s) = \int_0^\infty u(x, t) \exp(-st) dt, \quad \text{rappel de formule utile :} \quad \mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = s\bar{u}(x, s) - u(x, t=0) \quad (9)$$

2.3 Inversion de la transformée de Laplace

Exprimer la fonction $u(x, t)$, on utilisera la table d'inversion La table d'inversion

$$\bar{f}(s) = \frac{\exp(-qx)}{s}, \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(s)] = \operatorname{erfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{t}}\right] \quad (10)$$

Rappel :

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) \quad , \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\xi^2) d\xi \quad (11)$$

2.4 Problème 2

Mêmes questions avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, t=0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq \infty \quad , \quad u(x=0, t>0) = u_0 \exp(-\omega t) \quad , \quad u(x=\infty, t>0) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

2.5 Résolution dans l'espace transformé de Laplace (problème 2)

Commenter le problème physique posé. Appliquer la transformation de Laplace à l'ensemble des équations du problème. Exprimer l'équation différentielle à résoudre pour la fonction $\bar{u}$ et donner sa solution (on posera $q = \sqrt{s}$).

2.6 Inversion de la transformée de Laplace (problème 2)

Exprimer la fonction $u(x, t)$. On utilisera la table d'inversion

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\exp(-\sqrt{s}x)}{s-\alpha}\right] &= \\ &= \frac{1}{2} \exp(\alpha t) \left(\exp(-\sqrt{\alpha}x) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}} - \sqrt{\alpha t}\right) + \exp(\sqrt{\alpha}x) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}} + \sqrt{\alpha t}\right) \right) \end{aligned} \quad (13)$$

avec les correspondances

$$\alpha \rightarrow -\alpha \quad , \quad \sqrt{\alpha} \rightarrow i\sqrt{\alpha} \quad (14)$$

On introduit la fonction erreur complémentaire de la variable complexe :

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\xi^2) d\xi \quad (15)$$

dont on rappelle les propriétés (la barre de surlignement désigne le complexe conjugué dans la relation 17)

$$\operatorname{erfc}(z) + \operatorname{erfc}(-z) = 2 \quad (16)$$

$$\operatorname{erfc}(\bar{z}) = \overline{\operatorname{erfc}(z)} \quad , \quad z = a + ib \quad , \quad \bar{z} = a - ib \quad (17)$$

3 Rappels

3.1 Equation différentielle linéaire d'ordre N à coefficients constants

Soit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants, d'ordre n

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + a_2 y^{(n-2)}(x) + \dots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = 0 \quad (18)$$

On en recherche des solutions particulières sous la forme

$$y(x) = \exp(\alpha x) \quad (19)$$

d'où l'équation auxiliaire d'ordre n

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0 \quad (20)$$

Une discussion générale porte ensuite sur les n racines de l'équation 20, de leur ordre de multiplicité

- [1] à chaque racine réelle α_i simple correspond la solution particulière $\exp(\alpha_i x)$
- [2] à chaque paire de racines complexes conjuguées $\alpha_1 = \lambda + i\beta$ et $\alpha_2 = \lambda - i\beta$ correspond deux solutions particulières $\exp(\lambda x) \cos(\beta x)$ et $\exp(\lambda x) \sin(\beta x)$
- [3] à chaque racine réelle α_i d'ordre r , correspond r solutions particulières indépendantes

$$\exp(\alpha_i x) \quad , \quad x \exp(\alpha_i x) \quad , \dots, x^{r-1} \exp(\alpha_i x) \quad (21)$$

- [4] à chaque paire de racines complexes conjuguées $\alpha_1 = \lambda + i\beta$ et $\alpha_2 = \lambda - i\beta$ d'ordre μ correspond 2μ solution particulières

$$\exp(\lambda x) \cos(\beta x) \quad , \quad x \exp(\lambda x) \cos(\beta x) \quad , \dots, x^{\mu-1} \exp(\lambda x) \cos(\beta x) \quad (22)$$

$$\exp(\lambda x) \sin(\beta x) \quad , \quad x \exp(\lambda x) \sin(\beta x) \quad , \dots, x^{\mu-1} \exp(\lambda x) \sin(\beta x) \quad (23)$$

Master Génie Civil - M1
Examen Outils Mathématiques pour l'Ingénieur
Session 1, 2022-2023, 2 Heures - Sans Document (téléphone -
calculatrice non autorisés)

1 Diffusion 1D linéaire transitoire : résolution par séparation de variable et construction d'une série (8 points)

Résoudre le problème aux dérivées partielles suivant, équation parabolique 1D avec conditions initiales et aux limites, à l'aide de la méthode de séparation des variables et de la méthode de superposition des solutions.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < 2 \quad (1)$$

$$p(x, t = 0^+) = kx, \quad 0 < x < 2 \quad (2)$$

$$p(x = 0, t > 0) = 0, \quad p(x = 2, t > 0) = 0 \quad (3)$$

Démontrer l'orthogonalité des fonctions $\sin \left[(1+n) \frac{\pi}{2} x \right]$ sur l'intervalle $[0, 2]$ et construire la solution sous la forme d'une série. Rappel de l'orthogonalité

$$\int_{x=0}^2 \sin \left[(1+n) \frac{\pi}{2} x \right] \sin \left[(1+n') \frac{\pi}{2} x \right] dx = 0, \quad \text{si } n \neq n' \quad (4)$$

$$\int_{x=0}^2 \sin \left[(1+n) \frac{\pi}{2} x \right] \sin \left[(1+n') \frac{\pi}{2} x \right] dx = \alpha, \quad \text{si } n = n' \quad (5)$$

On utilisera $\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) + \cos(a+b))$ ou $\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$.

2 Equations différentielles (5 points)

2.1 Problème

Résoudre l'équation différentielle d'Euler

$$x^3 g^{(3)}(x) - 6x^2 g^{(2)}(x) + 12x g^{(1)}(x) - 12g(x) = 0 \quad (6)$$

Rappel : on recherche la solution sous la forme $g(x) = x^\alpha$ (on recherchera aussi les racines évidentes).

2.2 Problème

Résoudre l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 4 à coefficients constants (on recherchera la solution sous la forme $f(x) = \exp(\alpha x)$, on recherchera aussi les racines évidentes)

$$f^{(4)}(x) + f^{(3)}(x) - 7f^{(2)}(x) - f^{(1)}(x) + 6f(x) = 0 \quad (7)$$

3 Analyse tensorielle (7 points)

3.1 Produits doublement contractés

La convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés est systématiquement adoptée (ici sommation sur toutes les valeurs possibles des indices répétés, de 1 à 3), δ_{ij} représente le symbole de Kronecker, ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ sinon). Soient les tenseurs d'ordre quatre $\mathbb{I}$, $\mathbb{J}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ de composantes

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad , \quad J_{ijkl} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \quad , \quad K_{ijkl} = I_{ijkl} - J_{ijkl} \quad (8)$$

Soit $\underline{a}$ un tenseur d'ordre 2 quelconque de composantes a_{ij} , calculer

$$\mathbb{I} : \underline{a} \quad , \quad \mathbb{J} : \underline{a} \quad , \quad \mathbb{K} : \underline{a} \quad (9)$$

et interpréter le résultat. Donner les résultats dans le cas particulier d'un tenseur $\underline{a}$ symétrique ($a_{ji} = a_{ij}$). Rappel, le produit doublement contracté d'un tenseur d'ordre 4 $\mathbb{A}$ par un tenseur d'ordre 2 $\underline{a}$ est un tenseur d'ordre 2 dont la composante ij s'écrit

$$[\mathbb{A} : \underline{a}]_{ij} = A_{ijkl}a_{lk} \quad (10)$$

3.2 Changement de base pour les composantes d'un tenseur d'ordre deux

Soit le tenseur d'ordre 2

$$\underline{a} = a_{11}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + a_{33}\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (11)$$

et soit le changement de base caractérisé par la matrice Q_{ij}^α de composantes non nulles

$$Q_{11}^\alpha = 1, \quad Q_{22}^\alpha = Q_{33}^\alpha = \cos(\alpha), \quad Q_{23}^\alpha = -Q_{32}^\alpha = -\sin(\alpha) \quad (12)$$

telle que

$$\underline{e}_i^\alpha = Q_{ij}^\alpha \underline{e}_j \quad , \quad (j, i = 1, 2, 3) \quad , \quad \underline{e}_k = Q_{lk}^\alpha \underline{e}_l^\alpha \quad , \quad (k, l = 1, 2, 3) \quad (13)$$

Développer les relations de changement de base pour les tenseurs d'ordre deux, et exprimer les composantes a_{ij}^α du tenseur $\underline{a}$ dans la base $\underline{e}_i^\alpha$. On rappelle les relations de changement de base dans le cas général

$$\underline{a} = a_{kl}\underline{e}_k \otimes \underline{e}_l = a_{ij}^\alpha \underline{e}_i^\alpha \otimes \underline{e}_j^\alpha \quad (14)$$

$$a_{ij}^\alpha = Q_{ik}^\alpha Q_{jl}^\alpha a_{kl} \quad , \quad a_{ij} = Q_{ki}^\alpha Q_{lj}^\alpha a_{kl}^\alpha \quad (15)$$

Utiliser les relations

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \quad , \quad \sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \quad , \quad 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \sin(2\alpha) \quad (16)$$

pour exprimer le résultat en fonction de l'angle double 2α et commenter les utilisations pratiques de ces relations.

Master Génie Civil - M1
Examen Outils Mathématiques pour l'Ingénieur
Session 2, 2022-2023, 2 Heures - Sans Document (téléphone -
calculatrice non autorisés)

1 Tenseurs : produits contractés (6 points)

1.1 Rappels

La convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés est systématiquement adoptée (ici sommation sur toutes les valeurs possibles des indices répétés, de 1 à 3)
 δ_{ij} représente le symbole de Kronecker, ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ sinon), on a $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ (et on rappelle $\delta_{ik}\delta_{kj} = \delta_{ij}$)
. Le tenseur identité d'ordre deux $\underline{\underline{i}}$ s'écrit

$$\underline{\underline{i}} = \delta_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (1)$$

Produits contractés

$$\underline{\underline{a}} : \underline{\underline{b}} = a_{ij} b_{ji}, \quad \underline{\underline{A}} :: \underline{\underline{B}} = A_{ijkl} B_{lkji} \quad (2)$$

Soient les tenseurs d'ordre quatre $\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{J}}$ et $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{J}}$ de composantes

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad J_{ijkl} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad , \quad K_{ijkl} = I_{ijkl} - J_{ijkl} \quad (3)$$

1.2 Produits contractés

Calculer les produits doublement doublement contractés

$$\underline{\underline{i}} : \underline{\underline{i}}, \quad \underline{\underline{I}} :: \underline{\underline{I}}, \quad \underline{\underline{J}} :: \underline{\underline{J}}, \quad \underline{\underline{K}} :: \underline{\underline{K}} \quad (4)$$

Calculer les composantes $A_{ijkl}, B_{ijkl}, C_{ijkl}$

$$A_{ijkl} = I_{ijop} I_{pokl}, \quad B_{ijkl} = J_{ijop} J_{pokl}, \quad C_{ijkl} = I_{ijop} J_{pokl} \quad (5)$$

où $A_{ijkl}, B_{ijkl}, C_{ijkl}$ sont respectivement les composantes $ijkl$ des tenseurs d'ordre 4

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{I}}, \quad \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{J}} : \underline{\underline{J}}, \quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{J}} \quad (6)$$

2 Changement de base (9 points)

2.1 Cas 1

Soit le tenseur d'ordre 2 symétrique (toutes les composantes sont donc nulles sauf $a_{11} = -a_{22} = \tau$)

$$\underline{\underline{a}} = \tau (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) \quad (7)$$

et soit le changement de base caractérisé par la matrice Q_{ij}^α de composantes non nulles

$$Q_{33}^\alpha = 1, \quad Q_{11}^\alpha = Q_{22}^\alpha = \cos(\alpha), \quad Q_{12}^\alpha = -Q_{21}^\alpha = -\sin(\alpha) \quad (8)$$

telle que

$$\underline{e}_i^\alpha = Q_{ij}^\alpha \underline{e}_j, (j, i = 1, 2, 3) \quad , \quad \underline{e}_k = Q_{lk}^\alpha \underline{e}_l^\alpha, (k, l = 1, 2, 3) \quad (9)$$

Développer les relations de changement de base pour les tenseurs d'ordre deux, et exprimer les composantes a_{ij}^α du tenseur $\underline{a}$ dans la base $\underline{e}_i^\alpha$. On rappelle les relations de changement de base dans le cas général

$$\underline{a} = a_{kl} \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l = a_{ij}^\alpha \underline{e}_i^\alpha \otimes \underline{e}_j^\alpha \quad (10)$$

$$a_{ij}^\alpha = Q_{ik}^\alpha Q_{jl}^\alpha a_{kl} \quad , \quad a_{ij} = Q_{ki}^\alpha Q_{lj}^\alpha a_{kl}^\alpha \quad (11)$$

Utiliser les relations

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \quad , \quad \sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \quad , \quad 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) = \sin(2\alpha) \quad (12)$$

pour exprimer le résultat en fonction de l'angle double 2α et commenter les utilisations pratiques de ces relations. Donner également les relations dans le cas particulier $\alpha = \frac{\pi}{4}$. On rappelle

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin(-\frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (13)$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1, \quad \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0 \quad (14)$$

2.2 Cas 2

Mêmes questions avec

$$\underline{a} = a_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + a_{22} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 \quad (15)$$

3 Equation de diffusion 1D : résolution par transformation de Laplace (5 points)

3.1 Problème 1

Soit le problème aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (16)$$

$$u(x, t = 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \infty \quad , \quad u(x = 0, t > 0) = u_0 \quad , \quad u(x = \infty, t > 0) = 0$$

3.2 Résolution dans l'espace transformé de Laplace

Commenter le problème physique posé. Appliquer la transformation de Laplace à l'ensemble des équations du problème. Exprimer l'équation différentielle à résoudre pour la fonction $\bar{u}$ et donner sa solution (on posera $q = \sqrt{s}$).

$$\mathcal{L}[u(x, t)] = \bar{u}(x, s) = \int_0^\infty u(x, t) \exp(-st) dt, \quad \text{rappel de formule utile :} \quad \mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = s\bar{u}(x, s) - u(x, t = 0) \quad (17)$$

3.3 Inversion de la transformée de Laplace

Exprimer la fonction $u(x, t)$, on utilisera la table d'inversion

$$\bar{f}(s) = \frac{\exp(-qx)}{s}, \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(s)] = \text{erfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{t}}\right] \quad (18)$$

Rappel :

$$\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x) \quad , \quad \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\xi^2) d\xi \quad (19)$$

Master Génie Civil - M1
Examen Outils Mathématiques pour l'Ingénieur
Session 1, 2021-2022, 2 Heures - Sans Document (téléphone -
calculatrice non autorisés)

1 Equations différentielles (12 points)

1.1 Problème

Résoudre l'équation différentielle

$$x^3 f^{(4)}(x) + 6x^2 f^{(3)}(x) + 3x f^{(2)}(x) - 3f^{(1)}(x) = 0 \quad (1)$$

Soit $g(x) = f'(x) = f^{(1)}(x)$, résoudre dans un premier temps l'équation différentielle d'Euler déduite (rappel : on recherche la solution sous la forme $g(x) = x^\alpha$). Une fois la fonction $g(x)$ obtenue, en déduire par intégration la fonction $f(x)$ recherchée.

Equation déterminante

$$\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) + 6\alpha(\alpha - 1) + 3\alpha - 3 = (\alpha - 1)(\alpha(\alpha - 2) + 6\alpha + 3) = (\alpha - 1)(\alpha^2 + 4\alpha + 3) = 0 \quad (2)$$

$$(\alpha - 1)(\alpha + 1)(\alpha + 3) = 0, \quad \text{racines simples} \quad \alpha = -3, -1, 1 \quad (3)$$

$$g(x) = f'(x) = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x} + Cx \quad (4)$$

Solution recherchée de la forme

$$f(x) = \frac{a}{x^2} + b \ln x + cx^2 + d \quad (5)$$

1.2 Problème

Résoudre l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 4 à coefficients constants (on recherchera la solution sous la forme $f(x) = \exp(\alpha x)$)

$$f^{(4)}(x) + 4f^{(3)}(x) + 2f^{(2)}(x) - 4f^{(1)}(x) - 3f(x) = 0 \quad (6)$$

Racines : -1 racine double, 1 et -3 racines simples, solution

$$f(x) = C_1 \exp(-x) + C_2 x \exp(-x) + C_3 \exp(-3x) + C_4 \exp(x) \quad (7)$$

1.3 Problème

Résoudre l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants (on recherchera la solution sous la forme $f(x) = \exp(\alpha x)$)

$$f^{(2)}(x) - 6f^{(1)}(x) + 10f(x) = 0 \quad (8)$$

Racines : racines complexes conjuguées $3 + 2i$, $3 - 2i$, solution

$$f(x) = C_1 \exp(3x + 2ix) + C_2 \exp(3x - 2ix) = \exp(3x) (C_1 \exp(2ix) + C_2 \exp(-2ix)) \quad (9)$$

ou encore

$$f(x) = \exp(3x) (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)) \quad (10)$$

1.4 Problème

Soit l'équation différentielle d'Euler d'ordre 2

$$x^2 y^{(2)}(x) + \alpha_1 x y^{(1)}(x) + \alpha_2 y(x) = 0 \quad (11)$$

avec $r_1 = r_2$ racine double de l'équation déterminante (obtenue avec $y(x) = x^r$)

$$r(r-1) + \alpha_1 r + \alpha_2 = r^2 + (\alpha_1 - 1)r + \alpha_2 = 0 \quad (12)$$

On a dans ce cas

$$r_1^2 + (\alpha_1 - 1)r_1 + \alpha_2 = 0, \quad (\alpha_1 - 1)^2 = 4\alpha_2, \quad r_1 = r_2 = \frac{1 - \alpha_1}{2} \quad (13)$$

Soit $y_1(x) = C_1 x^{r_1}$ solution de l'équation (11). Rechercher la deuxième solution sous la forme

$$y_2(x) = u(x) x^{r_1} \quad (14)$$

Trouver l'équation différentielle

$$u^{(2)}(x)x + u'(x) = 0 \quad (15)$$

$$u(x) = \ln(x) + a \quad (16)$$

Solution

$$y(x) = (C_1 + C_2 \ln(x)) x^{r_1} \quad (17)$$

Il fallait justifier la seconde solution $\ln(x) x^{r_1}$ sur la base de l'équation différentielle (se rapporter à vos notes de cours/TD : nous l'avons fait à titre d'exercice).

2 Diffusion 1D linéaire transitoire : résolution par séparation de variable et construction d'une série (8 points)

Résoudre le problème aux dérivées partielles suivant, équation parabolique 1D avec conditions initiales et aux limites, à l'aide de la méthode de séparation des variables $p(x, t) = f(x)g(t)$ et de la méthode de superposition des solutions.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < t \quad (18)$$

$$p(x, t = 0^+) = kx, \quad 0 < x < 2 \quad (19)$$

$$p(x=0, t>0)=0 \quad , \quad p(x=2, t>0)=0 \quad (20)$$

Démontrer l'orthogonalité des fonctions $\sin \left[(1+n) \frac{\pi}{2} x \right]$ sur l'intervalle $[0, 2]$ et construire la solution sous la forme d'une série. Rappel de l'orthogonalité

$$\int_{x=0}^2 \sin \left[(1+n) \frac{\pi}{2} x \right] \sin \left[(1+n') \frac{\pi}{2} x \right] dx = 0, \quad \text{si } n \neq n' \quad (21)$$

$$\int_{x=0}^2 \sin \left[(1+n) \frac{\pi}{2} x \right] \sin \left[(1+n') \frac{\pi}{2} x \right] dx = \alpha, \quad \text{si } n = n' \quad (22)$$

On utilisera $\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) + \cos(a+b))$ ou $\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$.

3 Rappels

3.1 Equation différentielle linéaire d'ordre N à coefficients constants

Soit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants, d'ordre n

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + a_2 y^{(n-2)}(x) + \dots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = 0 \quad (23)$$

On en recherche des solutions particulières sous la forme

$$y(x) = \exp(\alpha x) \quad (24)$$

d'où l'équation auxiliaire d'ordre n

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0 \quad (25)$$

Une discussion générale porte ensuite sur les n racines de l'équation 25, de leur ordre de multiplicité

- [1] à chaque racine réelle α_i simple correspond la solution particulière $\exp(\alpha_i x)$
- [2] à chaque paire de racines complexes conjuguées $\alpha_1 = \lambda + i\beta$ et $\alpha_2 = \lambda - i\beta$ correspond deux solutions particulières $\exp(\lambda x) \cos(\beta x)$ et $\exp(\lambda x) \sin(\beta x)$
- [3] à chaque racine réelle α_i d'ordre r , correspond r solutions particulières indépendantes

$$\exp(\alpha_i x) \quad , \quad x \exp(\alpha_i x) \quad , \dots, x^{r-1} \exp(\alpha_i x) \quad (26)$$

- [4] à chaque paire de racines complexes conjuguées $\alpha_1 = \lambda + i\beta$ et $\alpha_2 = \lambda - i\beta$ d'ordre μ correspond 2μ solution particulières

$$\exp(\lambda x) \cos(\beta x) \quad , \quad x \exp(\lambda x) \cos(\beta x) \quad , \dots, x^{\mu-1} \exp(\lambda x) \cos(\beta x) \quad (27)$$

$$\exp(\lambda x) \sin(\beta x) \quad , \quad x \exp(\lambda x) \sin(\beta x) \quad , \dots, x^{\mu-1} \exp(\lambda x) \sin(\beta x) \quad (28)$$

Master Génie Civil - M1
Examen Outils Mathématiques pour l'Ingénieur
Session 1, 2019-2020, 2 Heures - Sans Document (téléphone -
calculatrice non autorisés)

1 Equations différentielles (12 points)

1.1 Problème 1

Résoudre l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 4 à coefficients constants (on recherchera la solution sous la forme $f(x) = \exp(\alpha x)$)

$$f^{(4)}(x) - 13f^{(2)}(x) + 36f(x) = 0 \quad (1)$$

1.2 Problème 2

Soit l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 4 à coefficients constants

$$f^{(4)}(\varphi) + \left(\alpha^2 + (\alpha + 2)^2\right) f^{(2)}(\varphi) + \left(\alpha^2(\alpha + 2)^2\right) f(\varphi) = 0 \quad (2)$$

En rechercher la solution sous la forme $f(\varphi) = \exp(\beta\varphi)$.

1.3 Problème 3

Soit l'équation différentielle non homogène

$$x^2 f^{(2)}(x) + 2x f'(x) - 2f(x) = \frac{k x^3}{\lambda + 2\mu} \quad (3)$$

On en recherche la solution sous la forme

$$f(x) = f_0(x) + F(x) \quad (4)$$

où f_0 est la solution de l'équation différentielle homogène et $F(x)$ la solution particulière de l'équation non homogène. Rechercher $f_0(x)$ sous la forme $f_0(x) = x^\alpha$ et $F(x)$ sous la forme d'un polynôme de même degré que le second membre. Commenter le problème posé et sa solution.

1.4 Problème 4

Soit l'équation différentielle d'Euler d'ordre 2

$$x^2 y^{(2)}(x) + \alpha_1 x y^{(1)}(x) + \alpha_2 y(x) = 0 \quad (5)$$

avec $r_1 = r_2$ racine double de l'équation déterminante (obtenue avec $y(x) = x^r$)

$$r(r-1) + \alpha_1 r + \alpha_2 = r^2 + (\alpha_1 - 1)r + \alpha_2 = 0 \quad (6)$$

On a dans ce cas

$$r_1^2 + (\alpha_1 - 1)r_1 + \alpha_2 = 0, \quad (\alpha_1 - 1)^2 = 4\alpha_2, \quad r_1 = r_2 = \frac{1 - \alpha_1}{2} \quad (7)$$

Soit $y_1(x) = C_1 x^{r_1}$ solution de l'équation (5). Rechercher la deuxième solution sous la forme

$$y_2(x) = u(x) x^{r_1} \quad (8)$$

2 Equation de diffusion 1D : résolution par transformation de Laplace (8 points)

Soit le problème aux dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \\ u(x, t=0) &= 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad , \quad u(x=0, t>0) = 1 - \exp(-\beta t) \quad , \quad u(x=1, t>0) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

2.1 Résolution dans l'espace transformé de Laplace

Commenter le problème physique posé. Appliquer la transformation de Laplace à l'ensemble des équations du problème. Exprimer l'équation différentielle à résoudre pour la fonction $\bar{u}$ et donner sa solution (on posera $q = \sqrt{s}$).

$$\mathcal{L}[u(x, t)] = \bar{u}(x, s) = \int_0^\infty u(x, t) \exp(-st) dt, \quad \text{rappel de formule utile :} \quad \mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = s\bar{u}(x, s) - u(x, t=0) \quad (10)$$

2.2 Inversion de la transformée de Laplace (facultatif)

Exprimer la fonction $u(x, t)$ sous forme d'une série. Utiliser les développements en série entière

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \forall x \quad ; \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{k=\infty} x^k, \quad |x| < 1 \quad (11)$$

ainsi que la table d'inversion

$$\bar{f}(s) = \frac{\exp(-qr)}{s}, \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(s)] = \text{erfc}\left[\frac{r}{2\sqrt{t}}\right] \quad (12)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\exp[-x\sqrt{s}]}{s-\alpha}\right] = \frac{1}{2} \exp[\alpha t] \left(\exp[-x\sqrt{\alpha}] \text{erfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{t}} - \sqrt{\alpha t}\right] + \exp[x\sqrt{\alpha}] \text{erfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{t}} + \sqrt{\alpha t}\right] \right) \quad (13)$$

Indication :

$$L[\exp(-bt)v(t)] = \bar{v}(s+b) \quad (14)$$

Soit la fonction

$$\bar{f}(s) = \frac{\exp\left[-x\sqrt{s + \frac{\lambda^2}{4}}\right]}{s + \beta} \quad (15)$$

que l'on ré-exprime sous la forme :

$$\bar{f}(s) = \bar{v}\left(s + \frac{\lambda^2}{4}\right), \quad \bar{v}(s) = \frac{\exp[-x\sqrt{s}]}{s - \left(\frac{\lambda^2}{4} - \beta\right)} \quad (16)$$

D'où la fonction inverse

$$\mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\bar{v}\left(s + \frac{\lambda^2}{4}\right)\right] = \exp\left[-\frac{\lambda^2}{4}t\right] v(t) \quad , \quad v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\exp[-x\sqrt{s}]}{s - \left(\frac{\lambda^2}{4} - \beta\right)}\right] \quad (17)$$

Rappel :

$$\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x) \quad , \quad \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\xi^2) d\xi \quad (18)$$

Master Génie Civil - M1
Examen Outils Mathématiques pour l'Ingénieur
Session 2, 2019-2020, 2 Heures - Sans Document (téléphone -
calculatrice non autorisés)

1 Diffusion 1D linéaire transitoire : résolution par séparation de variable et construction d'une série (8 points)

Résoudre le problème aux dérivées partielles suivant, équation parabolique 1D avec conditions initiales et aux limites, à l'aide de la méthode de séparation des variables et de la méthode de superposition des solutions.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < 2 \quad (1)$$

$$p(x, t = 0^+) = kx, \quad 0 < x < 2 \quad (2)$$

$$p(x = 0, t > 0) = 0, \quad p(x = 2, t > 0) = 0 \quad (3)$$

Démontrer l'orthogonalité des fonctions $\sin \left[(1+n) \frac{\pi}{2} x \right]$ sur l'intervalle $[0, 2]$ et construire la solution sous la forme d'une série. Rappel de l'orthogonalité

$$\int_{x=0}^2 \sin \left[(1+n) \frac{\pi}{2} x \right] \sin \left[(1+n') \frac{\pi}{2} x \right] dx = 0, \quad \text{si } n \neq n' \quad (4)$$

$$\int_{x=0}^2 \sin \left[(1+n) \frac{\pi}{2} x \right] \sin \left[(1+n') \frac{\pi}{2} x \right] dx = \alpha, \quad \text{si } n = n' \quad (5)$$

On utilisera $\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) + \cos(a+b))$ ou $\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$.

2 Diffusion 1D linéaire transitoire : transformation de Laplace (8 points)

Soit le problème aux dérivées partielles caractérisé par l'équation de champ ($0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq t$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6)$$

Condition initiale

$$u(x, t = 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (7)$$

Conditions aux limites

$$u(x = 0, t > 0) = 1, \quad u(x = 1, t > 0) = 0 \quad (8)$$

2.1 Poser le problème à résoudre dans l'espace transformé de Laplace

Appliquer la transformation de Laplace

$$\mathcal{L}[u(x, t)] = \bar{u}(x, s) = \int_0^\infty u(x, t) \exp(-st) dt \quad (9)$$

à l'ensemble des équations du problème. On utilisera notamment

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = s\bar{u}(x, s) - u(x, t=0) \quad (10)$$

2.2 Résolution dans l'espace transformé de Laplace

Exprimer la solution $\bar{u}(x, s)$ dans l'espace transformé de Laplace. On pourra poser $q = \sqrt{s}$ pour simplifier les notations.

2.3 Inversion de la transformée de Laplace

Utiliser le développement en série entière

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1 \quad (11)$$

ainsi que la table d'inversion

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\exp(-qx)}{s}\right] = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \quad (12)$$

Rappel :

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x), \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\xi^2) d\xi \quad (13)$$

pour exprimer la solution $u(x, t)$ sous la forme d'une série.

3 Equations différentielles (4 points)

3.1 Problème 1

Exprimer la solution de l'équation différentielle d'Euler (on recherchera la solution sous la forme $g(r) = r^\alpha$)

$$r^3 \frac{d^3 g}{dr^3} + 2r^2 \frac{d^2 g}{dr^2} - 9r \frac{dg}{dr} + 9g = 0 \quad (14)$$

3.2 Problème 2

Exprimer la solution $y(x)$ solution de l'équation différentielle d'Euler d'ordre 3

$$x^3 y^{(3)}(x) + 2x^2 y^{(2)}(x) - xy'(x) + y(x) = 0 \quad (15)$$

Master Génie Civil - M1
Examen Outils Mathématiques pour l'Ingénieur
Session 1, 2018-2019, 2 Heures - Sans Document

1 Equation de diffusion 1D : résolution par transformation de Laplace (8 points)

Soit le problème de diffusion ($0 \leq r \leq 1$) unidimensionnel à symétrie radiale en géométrie sphérique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - 4 \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad , \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (1)$$

$$u(r, t = 0) = 0 \quad , \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r = 0, t > 0) = 0 \quad , \quad u(r = 1, t > 0) = 1 \quad (3)$$

1.1 Poser le problème à résoudre dans l'espace transformé de Laplace

Appliquer la transformation de Laplace

$$\mathcal{L}[u(r, t)] = \bar{u}(r, s) = \int_0^\infty u(r, t) \exp(-st) dt \quad (4)$$

à l'ensemble des équations du problème.

1.2 Résolution dans l'espace transformé de Laplace

Considérer dans l'espace transformé de Laplace la fonction $\bar{v}$ telle que

$$\bar{u} = \frac{\bar{v}}{r} \quad (5)$$

Exprimer l'équation différentielle à résoudre pour la fonction $\bar{v}$ et en déduire sa solution (on posera $q = \sqrt{s}$).

1.3 Inversion de la transformée de Laplace

Utiliser les développements en série entière

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \text{valable pour toute valeur de } x \quad (6)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \quad \text{valable pour } |x| < 1 \quad (7)$$

ainsi que la table d'inversion

$$\bar{f}(s) = \frac{\exp(-qr)}{s} \quad , \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1} [\bar{f}(s)] = \operatorname{erfc} \left[\frac{r}{2\sqrt{t}} \right] \quad (8)$$

pour exprimer la solution $u(r, t)$ sous la forme d'une série.

Formulaire : on rappelle

$$\mathcal{L} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] = s\bar{u}(r, s) - u(r, t = 0) \quad (9)$$

2 Analyse tensorielle (5 points)

2.1 Produits doublement contractés

La convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés est systématiquement adoptée (ici sommation sur toutes les valeurs possibles des indices répétés, de 1 à 3), δ_{ij} représente le symbole de Kronecker, ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ sinon). Soient les tenseurs d'ordre quatre $\mathbb{I}$, $\mathbb{J}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ de composantes

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad , \quad J_{ijkl} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad , \quad K_{ijkl} = I_{ijkl} - J_{ijkl} \quad (10)$$

Soit $\underline{a}$ un tenseur d'ordre 2 quelconque de composantes a_{ij} , calculer

$$\mathbb{I} : \underline{a} \quad , \quad \mathbb{J} : \underline{a} \quad , \quad \mathbb{K} : \underline{a} \quad (11)$$

et interpréter le résultat. Donner les résultats dans le cas particulier d'un tenseur $\underline{a}$ symétrique ($a_{ji} = a_{ij}$).

Rappel, le produit doublement contracté d'un tenseur d'ordre 4 $\mathbb{A}$ par un tenseur d'ordre 2 $\underline{a}$ est un tenseur d'ordre 2 dont la composante ij s'écrit

$$[\mathbb{A} : \underline{a}]_{ij} = A_{ijkl} a_{lk} \quad (12)$$

2.2 Changement de base pour les composantes d'un tenseur d'ordre deux

Soit le tenseur d'ordre 2

$$\underline{a} = a_{11} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + a_{33} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (13)$$

et soit le changement de base caractérisé par la matrice Q_{ij}^α **de composantes non nulles**

$$Q_{11}^\alpha = 1, \quad Q_{22}^\alpha = Q_{33}^\alpha = \cos(\alpha), \quad Q_{23}^\alpha = -Q_{32}^\alpha = -\sin(\alpha) \quad (14)$$

telle que

$$\underline{e}_i^\alpha = Q_{ij}^\alpha \underline{e}_j \quad , (j, i = 1, 2, 3) \quad , \quad \underline{e}_k = Q_{lk}^\alpha \underline{e}_l^\alpha \quad , (k, l = 1, 2, 3) \quad (15)$$

Développer les relations de changement de base pour les tenseurs d'ordre deux, et exprimer les composantes a_{ij}^α du tenseur $\underline{a}$ dans la base $\underline{e}_i^\alpha$. On rappelle les relations de changement de base dans le cas général

$$\underline{a} = a_{kl} \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l = a_{ij}^\alpha \underline{e}_i^\alpha \otimes \underline{e}_j^\alpha \quad (16)$$

$$a_{ij}^\alpha = Q_{ik}^\alpha Q_{jl}^\alpha a_{kl} \quad , \quad a_{ij} = Q_{ki}^\alpha Q_{lj}^\alpha a_{kl}^\alpha \quad (17)$$

Utiliser les relations

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \quad , \quad \sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \quad , \quad 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) = \sin(2\alpha) \quad (18)$$

pour exprimer le résultat en fonction de l'angle double 2α et commenter les utilisations pratiques de ces relations.

3 Problèmes d'équilibre élastique 1D en géométrie cylindrique (déformations planes) (7 points)

On s'intéresse à des problèmes 1D à symétrie radiale, en géométrie cylindrique et déformations planes tels que le vecteur déplacement $\underline{\xi}$, les déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et contraintes associées sont de la forme

$$\underline{\xi} = \xi_r(r) \underline{e}_r \quad , \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}(r) = \frac{d\xi_r}{dr} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{\xi_r}{r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \quad (19)$$

Contraintes (comportement élastique linéaire isotrope, avec une précontrainte hydrostatique $\underline{\underline{\sigma}}_0 = \sigma_0 \underline{\underline{i}}$, $i_{ij} = \delta_{ij}$)

$$\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0 = \lambda Tr(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{i}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad \underline{\underline{i}} = \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (20)$$

3.1 Exprimer les contraintes

Exprimer les contraintes σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz}

3.2 Equation de Navier et solution en déplacement

En conditions 1D, symétrie radiale en géométrie cylindrique et déformations planes, les équations d'équilibre mécanique se réduisent à l'équation

$$\underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = \left(\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \right) \underline{e}_r = 0 \quad (21)$$

Exprimer l'équation différentielle sur le déplacement radial ξ_r (équation de Navier). En rechercher la solution sous la forme $\xi_r = r^\alpha$.

3.3 Déformations et contraintes

Exprimer les déformations et contraintes associées.

3.4 Résolution dans le cas d'une cavité cylindrique en milieu infini

Soit la contrainte initiale hydrostatique et uniforme $\underline{\underline{\sigma}}_0 = -p_0 \underline{\underline{i}}$ Résoudre le problème d'équilibre élastique dans le cas d'une cavité cylindrique de rayon $r = r_i$ dans un massif infini ($r_e \rightarrow \infty$), soumise à une pression intérieure p_i en $r = r_i$ et une pression extérieure p_0 en $r = r_e$. Calculer les parties sphériques et déviatoriques de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0$ et commenter.

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{sph} = \frac{1}{3} Tr(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{i}} = \frac{\underline{\underline{i}} : \underline{\underline{\varepsilon}}}{3} \underline{\underline{i}} = \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \underline{\underline{i}} \quad , \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{dev} = \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{sph} \quad (22)$$

Master Génie Civil - M1
Examen Outils Mathématiques pour l'Ingénieur
Session 1, 2017-2018, 2 Heures - Sans Document

1 Equation de diffusion 1D : résolution par la construction d'une série (7 points)

Résoudre le problème aux dérivées partielles suivant, équation parabolique 1D avec conditions initiales et aux limites, à l'aide de la méthode de séparation des variables et de la méthode de superposition des solutions.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad , \quad 0 < x < 2 \quad (1)$$

$$p(x, t = 0^+) = kx \quad , \quad 0 < x < 2 \quad (2)$$

$$p(x = 0, t > 0) = 0 \quad , \quad p(x = 2, t > 0) = 0 \quad (3)$$

Indication : on construira une série dont on calculera les coefficients en utilisant la propriété d'orthogonalité des fonctions

$$\sin \left[(1 + n) \frac{\pi}{2} x \right] \quad (4)$$

sur l'intervalle $[0, 2]$

2 Equation différentielle d'Euler (3 points)

Exprimer la solution de l'équation différentielle d'Euler

$$r^3 \frac{d^3 g}{dr^3} + 2r^2 \frac{d^2 g}{dr^2} - 9r \frac{dg}{dr} + 9g = 0 \quad (5)$$

Indication : on recherchera la solution sous la forme $g(r) = r^\alpha$

3 Produits contractés

La convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés est systématiquement adoptée (ici sommation sur toutes les valeurs possibles des indices répétés, de 1 à 3), δ_{ij} représente le symbole de Kronecker, ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ sinon). Soient les tenseurs d'ordre quatre $\mathbb{I}$, $\mathbb{J}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ de composantes

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad , \quad J_{ijkl} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad , \quad K_{ijkl} = I_{ijkl} - J_{ijkl} \quad (6)$$

Soit $\underline{\underline{a}}$ un tenseur d'ordre 2 quelconque de composantes a_{ij} , calculer

$$\mathbb{I} : \underline{\underline{a}} \quad , \quad \mathbb{J} : \underline{\underline{a}} \quad , \quad \mathbb{K} : \underline{\underline{a}} \quad (7)$$

et interpréter le résultat. Donner les résultats dans le cas particulier d'un tenseur $\underline{\underline{a}}$ symétrique ($a_{ji} = a_{ij}$). Appliquer les résultats précédents au tenseur

$$\underline{\underline{a}} = a_T (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + a_N \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (8)$$

et calculer

$$a_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{a}}^{dev} : \underline{\underline{a}}^{dev}} \quad , \quad \underline{\underline{a}}^{dev} = \mathbb{K} : \underline{\underline{a}} \quad (9)$$

Rappel :

$$[\mathbb{A} : \underline{\underline{a}}]_{ij} = A_{ijkl} a_{lk} \quad (10)$$

4 Relation de comportement élastique linéaire isotrope

Soit le tenseur d'élasticité linéaire isotrope

$$\mathbb{C} = 3k \mathbb{J} + 2\mu \mathbb{K} \quad (11)$$

et le tenseur du second ordre symétrique $\underline{\underline{\varepsilon}}$ que l'on décompose sous la forme

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon_v}{3} \underline{\underline{i}} + \underline{\underline{e}} \quad , \quad \frac{\varepsilon_v}{3} \underline{\underline{i}} = \mathbb{J} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad , \quad \underline{\underline{e}} = \mathbb{K} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (12)$$

exprimer le tenseur

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (13)$$

et le décomposer en parties sphérique et déviatorique (on notera $\sigma_m = \sigma_{kk}/3$ la contrainte moyenne et $\underline{\underline{s}}$ la partie déviatorique de $\underline{\underline{\sigma}}$). On définit σ_{eq} et γ_{eq}

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} \quad , \quad \gamma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{\gamma}} : \underline{\underline{\gamma}}} \quad , \quad \underline{\underline{\gamma}} = 2\underline{\underline{e}} \quad (14)$$

respectivement la contrainte déviatorique équivalente et la distorsion équivalente. Etablir la relation entre σ_m et ε_v d'une part, σ_{eq} et γ_{eq} d'autre part.

Exprimer $\underline{\underline{\sigma}}$, σ_m et σ_{eq} dans le cas particulier $\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$ et commenter. On rappelle les relations

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad , \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (15)$$

Soit ε_{11} un paramètre croissant, représenter schématiquement le trajet de contrainte dans le plan $\sigma_m - \sigma_{eq}$ pour différentes valeurs de coefficient de Poisson $\nu = 0, 1/4, 1/3, 1/2$.

Master Génie Civil - M1
Examen Outils Mathématiques pour l'Ingénieur
Session 2, 2016-2017, 2 Heures - Sans Document

06 janvier 2017

1 Equation de diffusion 1D : résolution par la construction d'une série (7 points)

Résoudre le problème aux dérivées partielles suivant, équation parabolique 1D avec conditions initiales et aux limites, à l'aide de la méthode de séparation des variables et de la méthode de superposition des solutions.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad , \quad 0 < x < 2 \quad (1)$$

$$p(x, t = 0^+) = kx \quad , \quad 0 < x < 2 \quad (2)$$

$$p(x = 0, t > 0) = 0 \quad , \quad p(x = 2, t > 0) = 0 \quad (3)$$

Indication : on construira une série dont on calculera les coefficients en utilisant la propriété d'orthogonalité des fonctions

$$\sin \left[(1 + n) \frac{\pi}{2} x \right] \quad (4)$$

sur l'intervalle $[0, 2]$

2 Equation différentielle d'Euler (3 points)

Exprimer la solution de l'équation différentielle d'Euler

$$r^3 \frac{d^3 g}{dr^3} + 2r^2 \frac{d^2 g}{dr^2} - 9r \frac{dg}{dr} + 9g = 0 \quad (5)$$

Indication : on recherchera la solution sous la forme $g(r) = r^\alpha$

3 Analyse tensorielle (10 points)

3.1 Produits doublement contractés

La convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés est systématiquement adoptée (ici sommation sur toutes les valeurs possibles des indices répétés, de 1 à 3), δ_{ij} représente

le symbole de Kronecker, ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ sinon). Soient les tenseurs d'ordre quatre $\mathbb{I}$, $\mathbb{J}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ de composantes

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad , \quad J_{ijkl} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \quad , \quad K_{ijkl} = I_{ijkl} - J_{ijkl} \quad (6)$$

Soit $\underline{\underline{a}}$ un tenseur d'ordre 2 quelconque de composantes a_{ij} , calculer

$$\mathbb{I} : \underline{\underline{a}} \quad , \quad \mathbb{J} : \underline{\underline{a}} \quad , \quad \mathbb{K} : \underline{\underline{a}} \quad (7)$$

et interpréter le résultat. Donner les résultats dans le cas particulier d'un tenseur $\underline{\underline{a}}$ symétrique ($a_{ji} = a_{ij}$).

Rappel, le produit doublement contracté d'un tenseur d'ordre 4 $\mathbb{A}$ par un tenseur d'ordre 2 $\underline{\underline{a}}$ est un tenseur d'ordre 2 dont la composante ij s'écrit

$$[\mathbb{A} : \underline{\underline{a}}]_{ij} = A_{ijkl}a_{lk} \quad (8)$$

3.2 Relation de comportement élastique linéaire isotrope

Soit le tenseur d'élasticité linéaire isotrope

$$\mathbb{C} = 3k\mathbb{J} + 2\mu\mathbb{K} \quad (9)$$

et le tenseur du second ordre symétrique $\underline{\underline{\varepsilon}}$ que l'on décompose sous la forme

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon_v}{3}\underline{\underline{i}} + \underline{\underline{e}} \quad , \quad \frac{\varepsilon_v}{3}\underline{\underline{i}} = \mathbb{J} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad , \quad \underline{\underline{e}} = \mathbb{K} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (10)$$

exprimer le tenseur

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (11)$$

et le décomposer en parties sphérique et déviatorique (on notera $\sigma_m = \sigma_{kk}/3$ la contrainte moyenne et $\underline{\underline{s}}$ la partie déviatorique de $\underline{\underline{\sigma}}$). On définit σ_{eq} et γ_{eq}

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} \quad , \quad \gamma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}\underline{\underline{\gamma}} : \underline{\underline{\gamma}}} \quad , \quad \underline{\underline{\gamma}} = 2\underline{\underline{e}} \quad (12)$$

respectivement la contrainte déviatorique équivalente et la distorsion équivalente. Etablir la relation entre σ_m et ε_v d'une part, σ_{eq} et γ_{eq} d'autre part.

Master Génie Civil - M1
Examen Outils Mathématiques pour l'Ingénieur
Session 2, 2016-2017, 2 Heures - Sans Document

06 janvier 2017

1 Equation de diffusion 1D : résolution par la construction d'une série (7 points)

Résoudre le problème aux dérivées partielles suivant, équation parabolique 1D avec conditions initiales et aux limites, à l'aide de la méthode de séparation des variables et de la méthode de superposition des solutions.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad , \quad 0 < x < 2 \quad (1)$$

$$p(x, t = 0^+) = kx \quad , \quad 0 < x < 2 \quad (2)$$

$$p(x = 0, t > 0) = 0 \quad , \quad p(x = 2, t > 0) = 0 \quad (3)$$

Indication : on construira une série dont on calculera les coefficients en utilisant la propriété d'orthogonalité des fonctions

$$\sin \left[(1 + n) \frac{\pi}{2} x \right] \quad (4)$$

sur l'intervalle $[0, 2]$

2 Equation différentielle d'Euler (3 points)

Exprimer la solution de l'équation différentielle d'Euler

$$r^3 \frac{d^3 g}{dr^3} + 2r^2 \frac{d^2 g}{dr^2} - 9r \frac{dg}{dr} + 9g = 0 \quad (5)$$

Indication : on recherchera la solution sous la forme $g(r) = r^\alpha$

3 Analyse tensorielle (10 points)

3.1 Produits doublement contractés

La convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés est systématiquement adoptée (ici sommation sur toutes les valeurs possibles des indices répétés, de 1 à 3), δ_{ij} représente

le symbole de Kronecker, ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ sinon). Soient les tenseurs d'ordre quatre $\mathbb{I}$, $\mathbb{J}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ de composantes

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad , \quad J_{ijkl} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \quad , \quad K_{ijkl} = I_{ijkl} - J_{ijkl} \quad (6)$$

Soit $\underline{\underline{a}}$ un tenseur d'ordre 2 quelconque de composantes a_{ij} , calculer

$$\mathbb{I} : \underline{\underline{a}} \quad , \quad \mathbb{J} : \underline{\underline{a}} \quad , \quad \mathbb{K} : \underline{\underline{a}} \quad (7)$$

et interpréter le résultat. Donner les résultats dans le cas particulier d'un tenseur $\underline{\underline{a}}$ symétrique ($a_{ji} = a_{ij}$).

Rappel, le produit doublement contracté d'un tenseur d'ordre 4 $\mathbb{A}$ par un tenseur d'ordre 2 $\underline{\underline{a}}$ est un tenseur d'ordre 2 dont la composante ij s'écrit

$$[\mathbb{A} : \underline{\underline{a}}]_{ij} = A_{ijkl}a_{lk} \quad (8)$$

3.2 Relation de comportement élastique linéaire isotrope

Soit le tenseur d'élasticité linéaire isotrope

$$\mathbb{C} = 3k\mathbb{J} + 2\mu\mathbb{K} \quad (9)$$

et le tenseur du second ordre symétrique $\underline{\underline{\varepsilon}}$ que l'on décompose sous la forme

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon_v}{3}\underline{\underline{i}} + \underline{\underline{e}} \quad , \quad \frac{\varepsilon_v}{3}\underline{\underline{i}} = \mathbb{J} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad , \quad \underline{\underline{e}} = \mathbb{K} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (10)$$

exprimer le tenseur

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (11)$$

et le décomposer en parties sphérique et déviatorique (on notera $\sigma_m = \sigma_{kk}/3$ la contrainte moyenne et $\underline{\underline{s}}$ la partie déviatorique de $\underline{\underline{\sigma}}$). On définit σ_{eq} et γ_{eq}

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} \quad , \quad \gamma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}\underline{\underline{\gamma}} : \underline{\underline{\gamma}}} \quad , \quad \underline{\underline{\gamma}} = 2\underline{\underline{e}} \quad (12)$$

respectivement la contrainte déviatorique équivalente et la distorsion équivalente. Etablir la relation entre σ_m et ε_v d'une part, σ_{eq} et γ_{eq} d'autre part.

Master Génie Civil - M1
Examen Outils Mathématiques pour l'Ingénieur
Session 2, 2018-2019, 2 Heures - Sans Document

1 Diffusion 1D linéaire transitoire : décomposition en série (8 points)

Soit le problème adimensionnel d'une couche initialement à une température u uniforme, refroidie sur un bord et isolée thermiquement sur l'autre

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

condition initiale

$$u(x, t = 0) = 1 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

conditions aux limites

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x = 0, t > 0) = 0 \quad , \quad u(x = 1, t > 0) = 0 \quad (3)$$

1.1 Solution de l'équation aux dérivées partielles et des conditions aux limites

Appliquer la méthode de séparation des variables de Fourier $u(x, t) = f(x)g(t)$ et exprimer la solution solution vérifiant les équations (1) et (3).

1.2 Orthogonalité des fonctions cosinus et condition initiale

Démontrer la propriété d'orthogonalité des fonctions

$$\cos\left((1 + 2n) \frac{\pi}{2} x\right) \quad (4)$$

sur l'intervalle $[0, 1]$ (déterminer la constante α , rappel $\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) + \cos(a + b))$)

$$\int_{x=0}^1 \cos\left((1 + 2n) \frac{\pi}{2} x\right) \cos\left((1 + 2n') \frac{\pi}{2} x\right) dx = 0 \quad , \quad \text{si} \quad n \neq n' \quad (5)$$

$$\int_{x=0}^1 \cos\left((1 + 2n) \frac{\pi}{2} x\right) \cos\left((1 + 2n') \frac{\pi}{2} x\right) dx = \alpha \quad , \quad \text{si} \quad n = n' \quad (6)$$

En déduire la solution du problème posé.

2 Diffusion 1D linéaire transitoire : transformation de Laplace (8 points)

Soit le problème aux dérivées partielles caractérisé par l'équation de champ ($0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq t$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7)$$

Condition initiale

$$u(x, t = 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (8)$$

Conditions aux limites

$$u(x = 0, t > 0) = 1, \quad u(x = 1, t > 0) = 0 \quad (9)$$

2.1 Poser le problème à résoudre dans l'espace transformé de Laplace

Appliquer la transformation de Laplace

$$\mathcal{L}[u(x, t)] = \bar{u}(x, s) = \int_0^\infty u(x, t) \exp(-st) dt \quad (10)$$

à l'ensemble des équations du problème. On utilisera notamment

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = s\bar{u}(x, s) - u(x, t = 0) \quad (11)$$

2.2 Résolution dans l'espace transformé de Laplace

Exprimer la solution $\bar{u}(x, s)$ dans l'espace transformé de Laplace. On pourra poser $q = \sqrt{s}$ pour simplifier les notations.

2.3 Inversion de la transformée de Laplace

Utiliser le développement en série entière

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1 \quad (12)$$

ainsi que la table d'inversion

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\exp(-qx)}{s}\right] = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \quad (13)$$

Rappel :

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x), \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\xi^2) d\xi \quad (14)$$

pour exprimer la solution $u(x, t)$ sous la forme d'une série.

3 Analyse tensorielle (4 points)

Soit $\underline{\varepsilon}$ tenseur du second ordre symétrique ($\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}$, $i, j \in 1, 2, 3$)

3.1 Expressions développées des invariants D_1 et D_2

Exprimer sous forme développée les invariants

$$D_1 = \underline{\underline{i}} : \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad D_2 = \frac{1}{2} \left((\underline{\underline{i}} : \underline{\underline{\varepsilon}})^2 - \underline{\underline{i}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{\varepsilon}}) \right) \quad (15)$$

3.2 Invariants ε_m et ε_{eq}

Exprimer les composantes ij des tenseurs du second ordre $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{sph}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{dev}}$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{sph}} = \mathbb{J} : \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{dev}} = \mathbb{K} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (16)$$

Exprimer les invariants

$$\varepsilon_m = \frac{\underline{\underline{i}} : \underline{\underline{\varepsilon}}}{3}, \quad \varepsilon_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{dev}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{dev}}} \quad (17)$$

Appliquer ces résultats (exprimer $\varepsilon_m, \varepsilon_{eq}$) au tenseur

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_T (\underline{\underline{e}}_1 \otimes \underline{\underline{e}}_1 + \underline{\underline{e}}_2 \otimes \underline{\underline{e}}_2) + \varepsilon_N \underline{\underline{e}}_3 \otimes \underline{\underline{e}}_3 \quad (18)$$

4 Rappels

δ_{ij} représente le symbole de Kronecker, ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ sinon) Produits contractés

$$\underline{\underline{a}} : \underline{\underline{b}} = a_{ij} b_{ji}, \quad \underline{\underline{A}} :: \underline{\underline{B}} = A_{ijkl} B_{lkji} \quad (19)$$

$\mathbb{I}, \mathbb{J}, \mathbb{K}$ tenseurs d'ordre quatre

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad J_{ijkl} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad \mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J} \quad (20)$$