

Objectifs :

- Acquérir les notions mathématiques et les outils nécessaires à l'analyse temporelle et fréquentielle des signaux de signaux biomédicaux.
- Comprendre les principales fonctions de traitement numériques des signaux.

I. REPRESENTATION FREQUENTIELLE DES SIGNAUX :

La représentation fréquentielle des signaux (spectre) s'appuie sur la décomposition de Fourier. Elle peut prendre la forme d'une série ou bien d'une transformée :

- ✓ Décomposition en série de Fourier pour les signaux périodiques (stationnaire).
- ✓ Transformation de Fourier pour les signaux apériodiques

A. Cas des signaux à temps continu :

1. Les signaux périodiques :

Un signal est dit périodique s'il existe T tel que, pour tout $t \in (-\infty, +\infty)$, $s(t+T) = s(t)$. La plus petite valeur positive T vérifiant cette propriété s'appelle la période. L'inverse de T s'appelle la fréquence fondamentale. Les multiples de la fréquence fondamentale s'appellent les fréquences harmoniques.

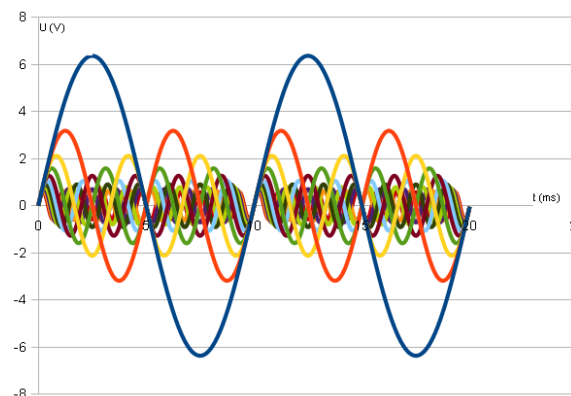


Figure 1: Décomposition harmonique.

Les signaux périodiques entrent dans la classe des signaux de puissance finie et on a : $P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |s(t)|^2 dt$ (5)

On sait déjà que n'importe quel signal $s(t)$ périodique de fréquence f_0 est constitué d'une somme d'harmoniques sinusoïdales de fréquence $f_0, 2f_0, 3f_0, \dots, kf_0$ plus éventuellement une composante continue. Ce qui donne l'expression suivante :

$$s(t) = S_{moy} + C_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + C_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2) + C_3 \cos(3\omega_0 t + \varphi_3) + \dots C_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) \quad (6)$$

Ou encore : $s(t) = S_{moy} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) \quad (7)$

Rappel :

Pour déterminer les amplitudes et phases des composantes sinusoïdales à partir de la forme d'onde du signal, on utilise pour cela un outil mathématique : la série de Fourier.

On donne $s(t) = S_{moy} + \sum_{k=1}^{+\infty} [A_k \cos(k\omega_0 t) + B_k \sin(k\omega_0 t)]$ avec $A_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \cos(k\omega_0 t) dt$ et $B_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \sin(k\omega_0 t) dt$. Et aussi avec $C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$ et $\varphi_k = \tan^{-1} \left[\frac{B_k}{A_k} \right]$.

Pour connaître les caractéristiques des harmoniques (amplitude et phase) il faut déterminer A_k et B_k . On peut alors donner une représentation spectrale du signal (amplitude en fonction de la fréquence).

Notation complexe :

En utilisant la notation d'Euler l'équation (7) devient :

$$s(t) = S_{\text{moy}} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left[\frac{e^{(jk\omega_0 t)} + e^{-(jk\omega_0 t)}}{2} \right] \quad \text{ou} \quad \text{encore}$$

$$s(t) = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} S_k \left[e^{(jk\omega_0 t)} + e^{-(jk\omega_0 t)} \right] \text{ avec } S_0 \text{ la valeur moyenne du signal et } S_k = \frac{C_k}{2}.$$

Pour simplifier l'expression de $s(t)$ devient : $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_k \left[e^{(jk\omega_0 t)} \right]$

(6) avec $S_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) e^{(-jk\omega_0 t)} dt$ (8).

Rem1 : $S_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt$ représente la valeur moyenne du signal.

On utilise désormais la représentation bilatérale pour la représentation fréquentielle du signal. Cela tient compte que le l'indice $k \in (-\infty, +\infty)$.

Rem2 : La représentation fréquentielle d'un signal périodique est donnée par un spectre de raies ($\pm kf$).

L'égalité de Parseval :

La relation de Parseval est très importante, car elle possède une interprétation énergétique simple : la puissance d'un signal périodique est égale à la somme des puissances élémentaires de chacune de ses composantes.

$$P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |S_k|^2 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |s(t)|^2 dt \quad (9).$$

Exemple : cas d'un signal sinusoïdal $s(t) = A \sin(\omega_0 t)$.

2. Cas des signaux à énergie finie (non périodique) :

La transformée de Fourier généralise la notion de série de Fourier au cas des signaux non périodiques. Nous la désignerons par TFTC (transformée de Fourier à temps continu) ou TF.

Dans ce cas, les coefficients de la série de Fourier (8) deviennent un motif

unique de période infinie. Ce qui donne $S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{(-j2\pi ft)} dt = TF[s(t)]$

(10). La transformée de Fourier en temps continu permet de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel et inversement.

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{(j2\pi ft)} df = TF^{-1}[S(f)] \quad (11).$$

Rem1 : La série de Fourier n'est pas adaptée lorsque le signal est non-stationnaire.

Rem2 : La représentation fréquentielle du signal est une fonction continue de la fréquence.

Ajouter dessin spectre bilatéral

B. Les signaux discrets:

1. Principe de la T.D.F.:

La transformée de Fourier $S(f)$ d'un signal discret $s(nT_e)$ est définie par :

$$S(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \text{ devient } S(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(nT_e) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

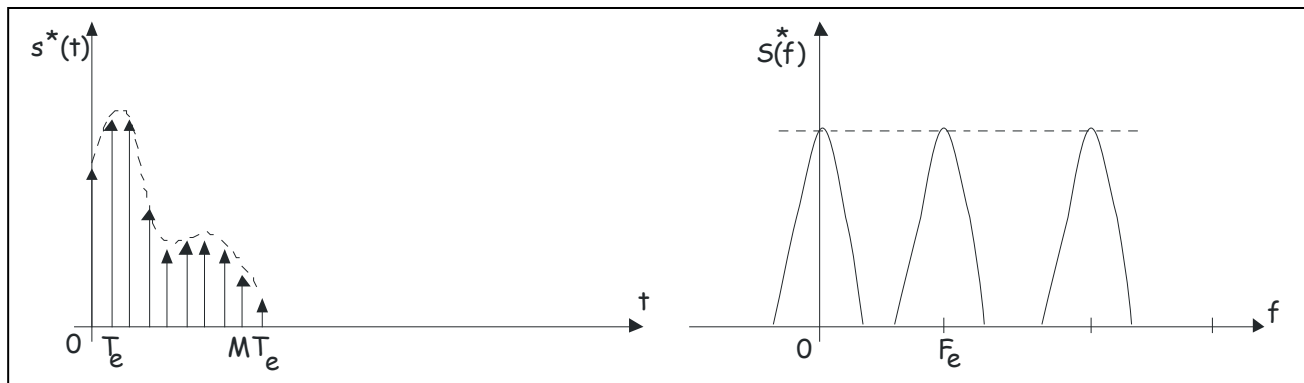
La transformée de Fourier discrète (TFD) permet à l'aide d'un calculateur numérique d'avoir un aperçu de $S(jf)$, or on a seulement accès au signal échantillonné $s^*(t)$ qui s'écrit : $s^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t) \delta(t - nT_e)$ (multiplication par un peigne de Dirac). Comme le signal échantillonné n'existe que tous les multiples T_e , la transformée de $s^*(t)$ devient alors:

$$S^*(jf) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_e) e^{-j2\pi fnT_e} \quad (12).$$

Rem1 : La transformée de Fourier est Complexe, donc pour une représentation graphique il faut prendre le module $|S^*(jf)| = S(f)$.

Rem2 : On rappelle qu'une multiplication dans le domaine temporel est équivalente à une convolution dans le domaine fréquentiel. Cette transformation s'accompagne d'une **multiplication de l'amplitude de $S(jf)$ par $1/T_e$** . Donc dans le domaine de fréquence $\left[-\frac{f_e}{2}; \frac{f_e}{2}\right]$ on obtient $S(jf) = T_e S^*(jf)$.

Rem3 : L'échantillonnage du signal $s(t)$ revient à « périodiser » le spectre.



Comme on limite le nombre d'échantillons à M , la TFD s'écrit : $S^*(jf) = \sum_{n=0}^{M-1} s(nT_e) \cdot e^{-j2\pi fnT_e}$. Cette réduction n'est pas gênante si la durée d'échantillonnage est suffisamment grande.

Rem4 : D'autre part la variable f est continue et le calculateur ne peut fournir qu'un nombre limité d'échantillons de $S^*(jf)$. Il est alors nécessaire de prendre des valeurs discrètes de f avec un pas Δf . Donc la fréquence devient $f = k\Delta f$ avec k entier. $S^*(jk\Delta f) = \sum_{n=0}^{M-1} s(nT_e) e^{-j2\pi kn\Delta f T_e}$. Pour que l'échantillonnage soit correct on peut prendre $\Delta f = \frac{f_e}{M}$.

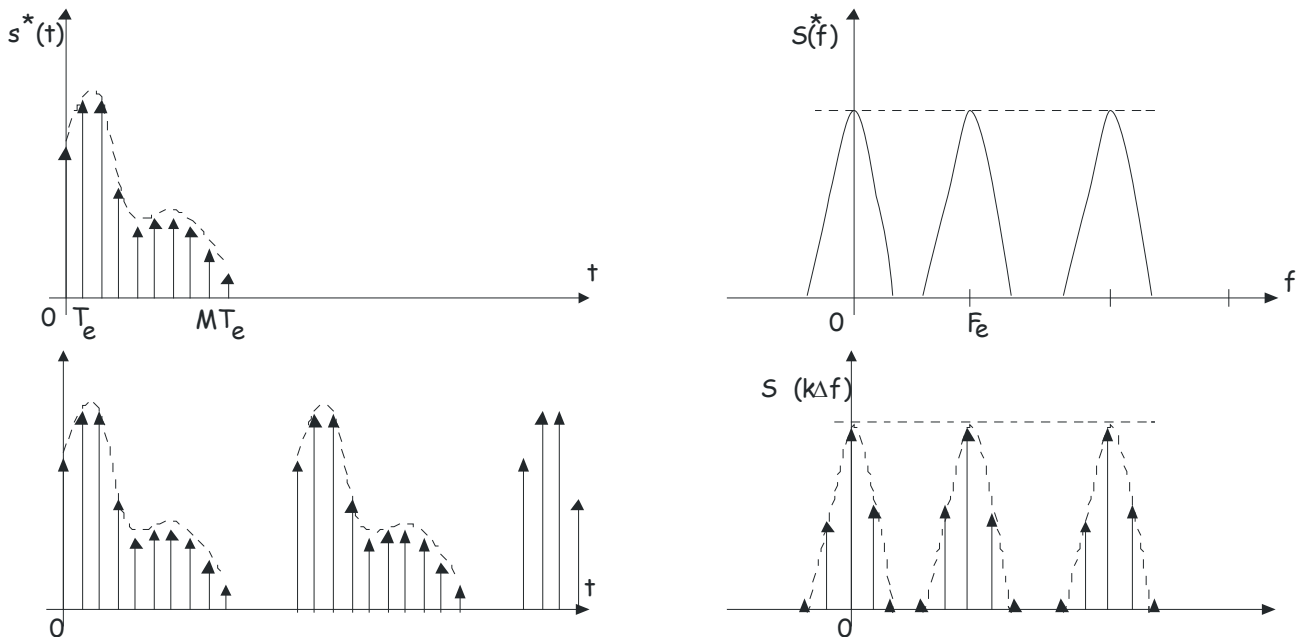


Figure 2 : Spectre obtenue par TFD

On aboutit dans le domaine de fréquence $\left[-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}\right]$ au résultat suivant : $S(jf) = \frac{1}{M} S^*(jk\Delta f)$ avec

$$S(jk\Delta f) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} s(nT_e) e^{-j2\pi \frac{nk}{M}} \quad (13)$$

l'expression de la TFD qui sera équivalente à $S(jf)$ dans le domaine $\left[-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}\right]$.

Rem5 : Pour le calculateur, cela revient à considérer le signal temporel comme étant périodique de période MT_e .

Rem6 : Nouvelle égalité de Parseval : la puissance d'un signal échantillonné est portée à la fois par les échantillons

temporelles $s(n)$ mais aussi par les échantillons fréquentielles $S(k)$.

$$\sum_{n=0}^{M-1} |s(n)|^2 = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} |S(k)|^2 \quad (14)$$

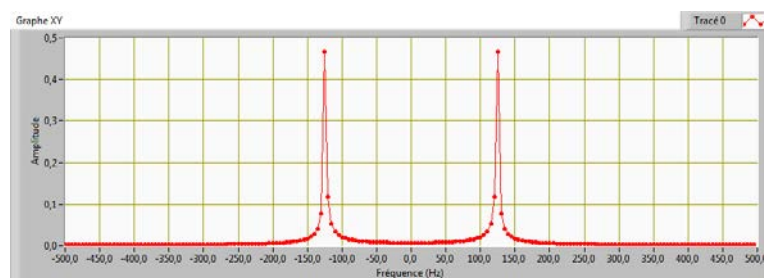


Figure 3 : Spectre TFD

2. Fenêtrage :

Pour tracer l'allure du spectre du signal $s(n)$, on échantillonne le spectre $S(f)$ avec un pas Δf le spectre $S(k\Delta f)$ est alors plus ou moins proche de $S(f)$. Un certain nombre de défauts peuvent alors apparaître dans la représentation graphique. Pour réduire ces défauts on utilise une pondération temporelle des échantillons appelée « Fenêtrage ». Le fenêtrage est utilisé dès que l'on s'intéresse à un signal de longueur volontairement limité. On multiplie le signal $s(n)$ par une fonction fenêtre d'observation (également appelée fenêtre de pondération ou d'apodisation). La plus simple est la fenêtre rectangulaire (ou porte). On cite notamment les fenêtres triangulaires, de Hanning, de Hamming, de Blackman...

$$S_w(jk\Delta f) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} s(nT_e)w(nT_e)e^{-j2\pi\frac{nk}{M}} \quad (15)$$

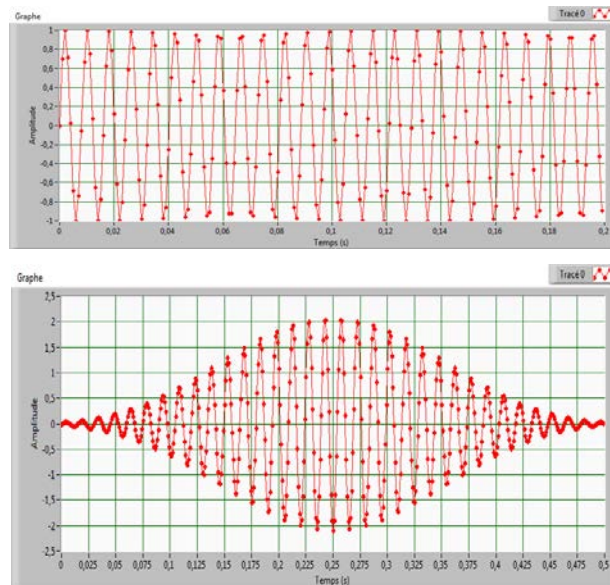


Figure 4 : Signal temporel avec et sans fenêtrage

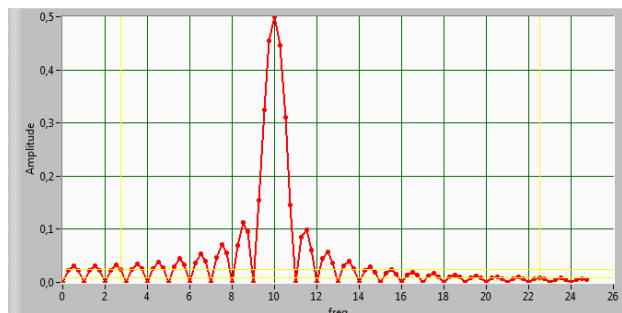


Figure 5 : Spectre sans pondération

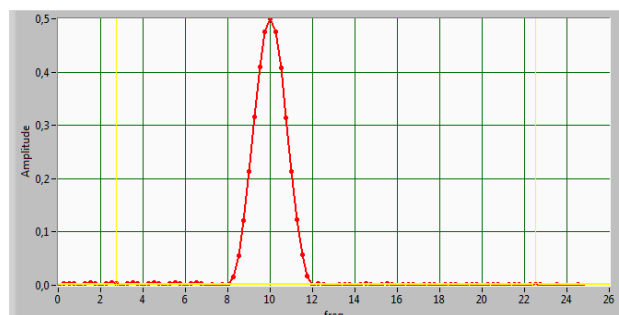


Figure 6 : Spectre avec pondération de Hamming

On obtient dans le cas où $s(n)$ est sinusoïdale, une TDF $S(k)$ comme le montre l'exemple ci-dessus. On effectue le calcul avec M points. **Attention plus M est grand plus le spectre est précis mais plus le temps de calcul est grand.**

3. Transformée de Fourier rapide T.F.R (F.F.T) :

On n'abordera pas ici en détail l'algorithme de Cooley (entrelacement temporel) mais seulement quelques généralités.

Si le nombre d'échantillons $\{s(n)\}$ est grand, le temps de calcul est trop important pour des applications d'analyse spectrale en temps réel. Pour réduire ce temps de calcul, on choisit un nombre d'échantillons $M=2^N$. La séquence $\{s(n)\}$ se divise alors en deux séquences $\{s_1(n)\}$ et $\{s_2(n)\}$ de $\frac{M}{2}$ termes.

$\{s_1(n)\}$ ne comporte que les rangs pairs $\{s(0), s(2), s(4), \dots, s(2i), \dots, s(2i+1)\}$ et $\{s_2(n)\}$ ne comporte que les rangs impairs $\{s(1), s(3), s(5), \dots, s(2i+1), \dots, s(2i+2)\}$. Si on répète cette opération en séparant à nouveau les séquences $\{s_1(n)\}$ et $\{s_2(n)\}$ en deux séquences de $\frac{M}{4}$ termes. On poursuit ainsi jusqu'à ce que l'on ait plus que deux échantillons par sous-séquence. Il ne reste plus alors qu'à appliquer la TFD.

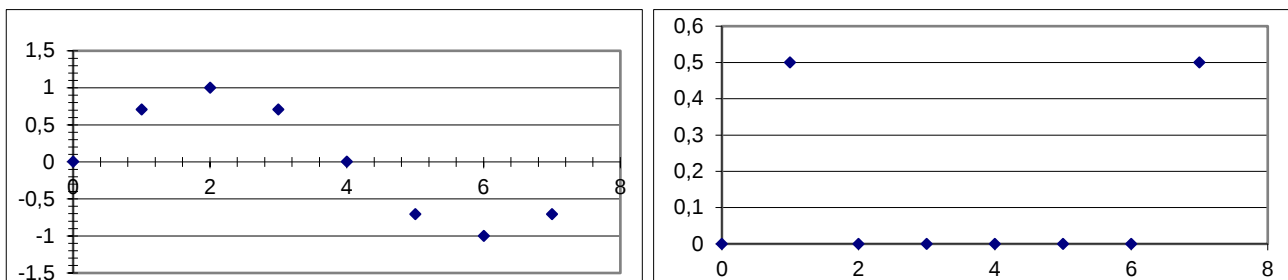
On note pour simplifier les notations : $e^{-j2\pi \frac{kn}{M}} = W^{kn}$. Exprimons simplement la TFD pour une sous séquence de 2 échantillons. Soit $S_r(k) = \frac{1}{2} \sum_{n_1, n_2} s(nT_e) W^{kn}$.

On montrera par exemple facilement que pour $n_1=0$ et $n_2=4$ la transformée donnera par exemple :
$$S_r(1) = \frac{1}{2} [s(0) + W^4 s(1)]$$

On s'aperçoit donc que les échantillons ne sont plus traités dans leur ordre naturel de départ (n croissant) comme dans la TFD, mais dans un ordre qui résulte des dédoublements successifs. C'est la raison pour laquelle on dit qu'il y a eu entrelacement temporel.

Dans ce cas, le nombre de calculs (opérations) est proportionnel à $M \cdot \log(M)$ au lieu de M^2 pour la TFD.

Lorsqu'on applique alors l'algorithme, L'opération est très rapide, puis on remet les échantillons fréquentiels dans l'ordre.

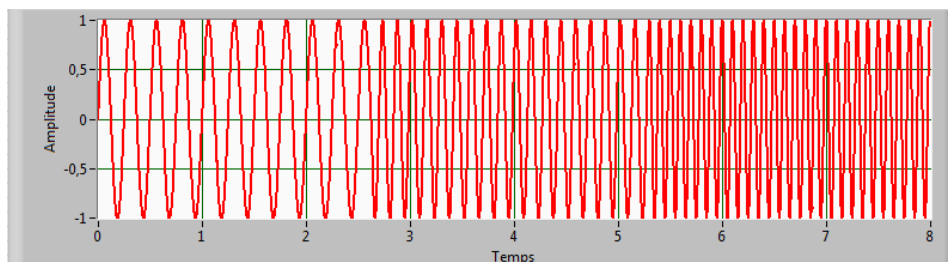


Pour $M=128$, le temps de calcul de la TRF (FFT) a été sensiblement réduit par rapport à la TDF.

C. Problème de résolution spatiale ou localisation temporelle :

Dans le cas de signaux déterministes non-stationnaires, l'utilisation de la TFD ou de la FFT n'est pas une solution pertinente car elle ne tient pas compte de l'apparition et de la disparition des signaux au cours du temps. Les algorithmes de TFD ou de TRF auront un effet « moyennneur » sur le spectre.

On prend l'exemple d'un signal $s(t)$ limité dans le temps et composé de 3 sinusoides successives d'amplitudes identiques et de fréquences différentes f_1 , f_2 et f_3 .



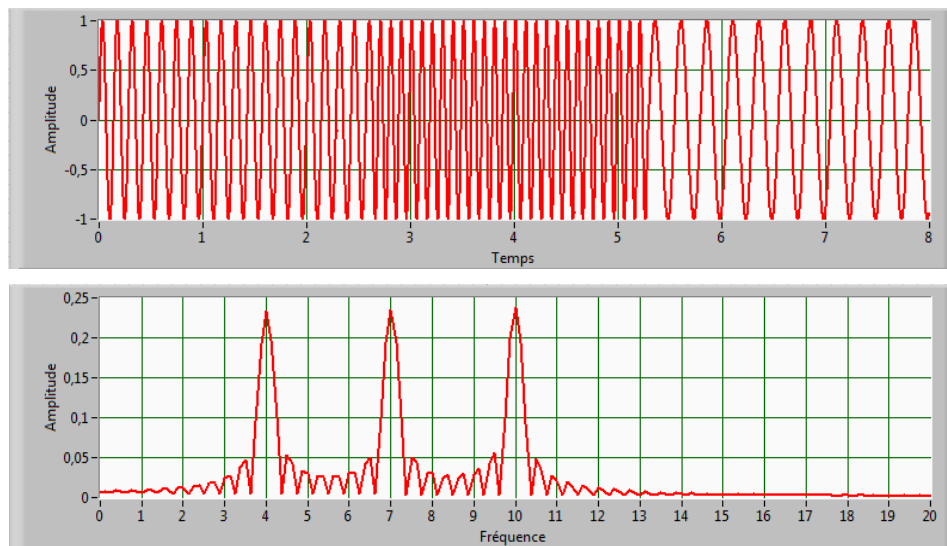


Figure 7 : Spectre d'un signal composite (succession temporelle de 3 sinusoïdes de fréquences différentes)

On peut observer que le calcul par transformée de Fourier donne bien l'ensemble des raies qui composent le signal (localisation fréquentielle) mais sans pouvoir déterminer les instants où chacune de ces fréquences apparaît (pas de localisation temporelle).

Rem : La transformée de Fourier repose sur une base de fonctions sinusoïdales de durée infinie qui ne permet pas d'étudier le spectre d'un signal (les variations de son contenu fréquentiel) en fonction du temps.

D. Représentation temps-fréquence : Transformée de Fourier à fenêtre glissante :

La transformée de Fourier « glissante » effectue la transformée de Fourier du produit du signal par une fenêtre localisée dans le temps. Elle possède donc 2 arguments et se définit comme suit :

$$S(f, t) = TFFG[s(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) w(\tau - t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) \psi(\tau, t, f) d\tau \quad (16)$$

$\psi(\tau, t, f) = w(\tau - t) e^{-j2\pi f\tau}$ est une fonction « analysante » (gaussienne) centrée en fréquence sur f et temporellement en t .

Si $t = 0$, on retrouve l'expression de la transformée de Fourier fenêtrée précédente (centrée temporellement en 0). En faisant varier t , la fenêtre de calcul du spectre se déplace le long de l'axe temporel. On effectue donc une analyse 2D (t, f) du signal.

Rem1 : Dans la pratique, la transformée de Fourier à fenêtre glissante rapide consiste en une succession de FFT.

Le spectrogramme est la représentation du module (ou du carré) de $S(f, t)$ c'est-à-dire la densité d'énergie $P(t, f) = |S(f, t)|^2$, dans le repère temps-fréquence avec les résolutions en temps Δt et en fréquence Δf constantes.

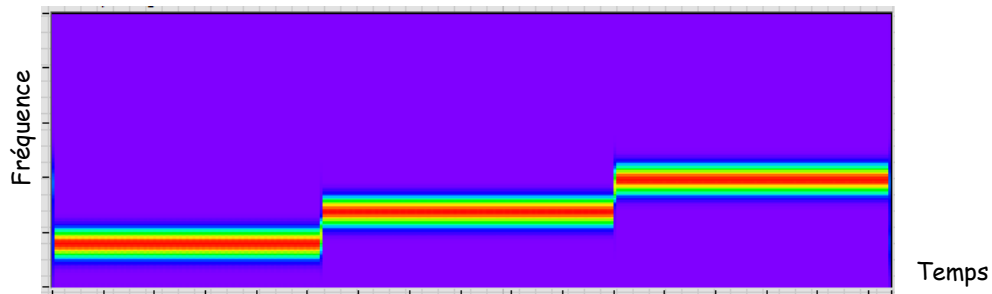


Figure 8: Spectrogramme 2D (temps, fréquence).

Rem2 : Une bonne localisation temporelle nécessite une fenêtre de support court tandis qu'une bonne résolution fréquentielle demande un support long autrement dit plus une fonction est concentrée en temps moins elle l'est en fréquence.

Rem3 : Pour la TFFG, les fréquences basses ont besoin d'être caractérisées sur des temps « longs » avec Δt grand, les fréquences élevées pourraient l'être sur des temps plus courts de sorte que la résolution temporelle soit améliorée. A l'inverse, les fréquences hautes nécessite une résolution Δf grande ce qui est inutile voir gênant pour les petites fréquences. Il faudrait donc pouvoir faire varier la taille des résolutions Δt Δf de la fenêtre glissante en fonction de la fréquence.

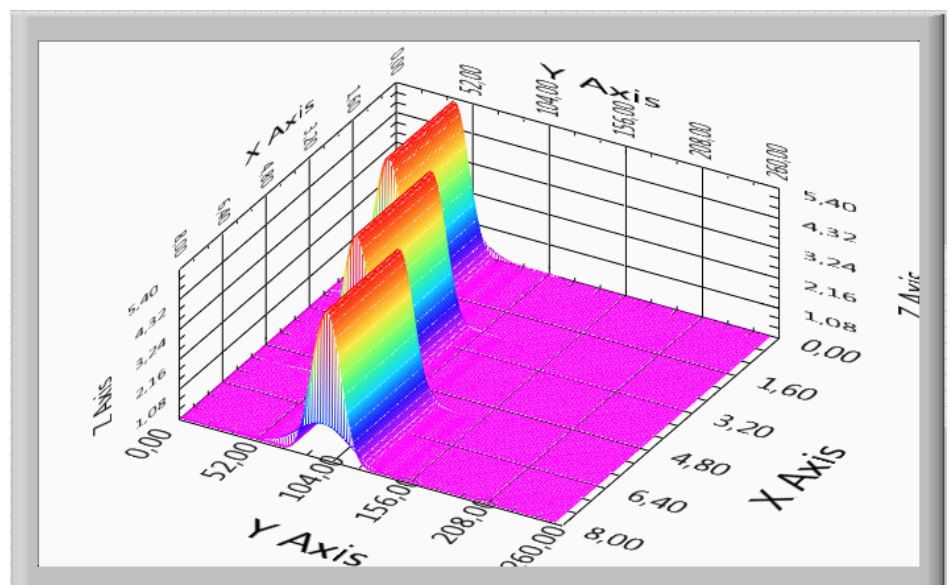


Figure 9: Spectrogramme 3D avec X(temps), Y(fréquence) et Z(énergie)

II. LE PRODUIT DE CONVOLUTION ET SES APPLICATIONS :

A. Principe :

1. Définition:

Soit un signal $e(t)$ appliqué à l'entrée d'un système linéaire et $s(t)$ la réponse. On définit ci-dessous l'allure d'une impulsion Dirac $\delta(t)$ de durée T et d'amplitude $1/T$.

Le signal $e(t)$ peut être considéré approximativement comme une somme d'impulsions $\delta(t)$ décalées dans le temps les unes par rapport aux autres, d'une durée T et d'amplitude $Te(nT)$. Lorsque T tend vers zéro, cette somme d'impulsions pondérées sera équivalente au signal $e(t)$.

Il en découle l'expression de $e(t)$:

$$e(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) e(nT) T.$$

Comme T tend vers zéro alors

$$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - u) e(u) du.$$

De même si $h(t)$ est la réponse du système linéaire à une impulsion $\delta(t)$ Dirac, alors la sortie devient

$$s(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(t - nT) e(nT) T.$$

Ce qui donne pour

les mêmes raisons : $s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - u) e(u) du.$ Cette

expression permet donc, connaissant la réponse impulsionnelle $h(t)$ et l'entrée $e(t)$, de déterminer $s(t)$.

Elle s'appelle « produit de convolution » de $h(t)$ par $e(t)$. On la note pour simplifier $s(t) = [h * e](t)$ ou $s(t) = h * e$.

Comme le signal d'entrée est causal, et en prenant comme origine des temps le moment où le signal apparaît (par défaut $t=0$), le produit de convolution s'écrit :

$$s(t) = \int_0^t h(t - u) e(u) du.$$

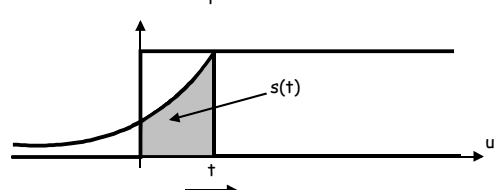
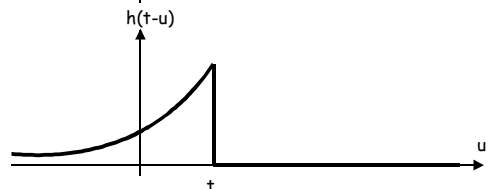
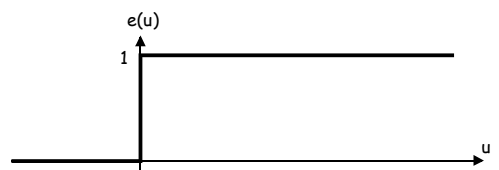
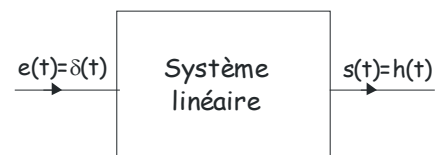
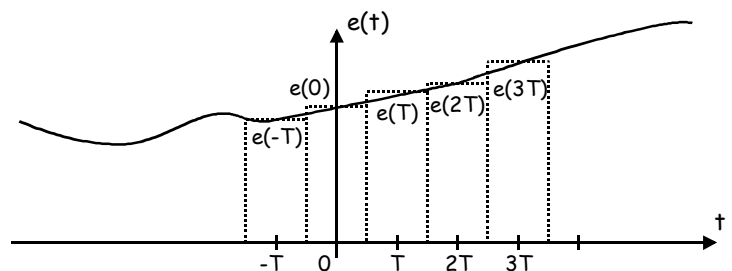
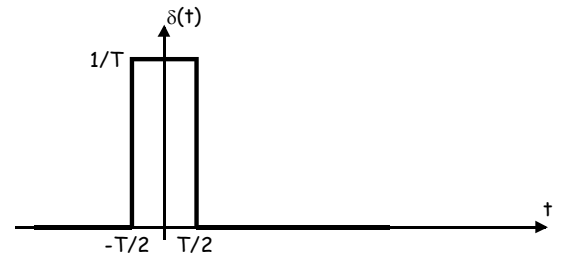
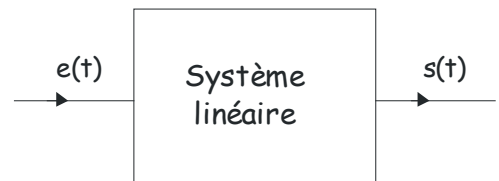
2. Représentation et significations physiques:

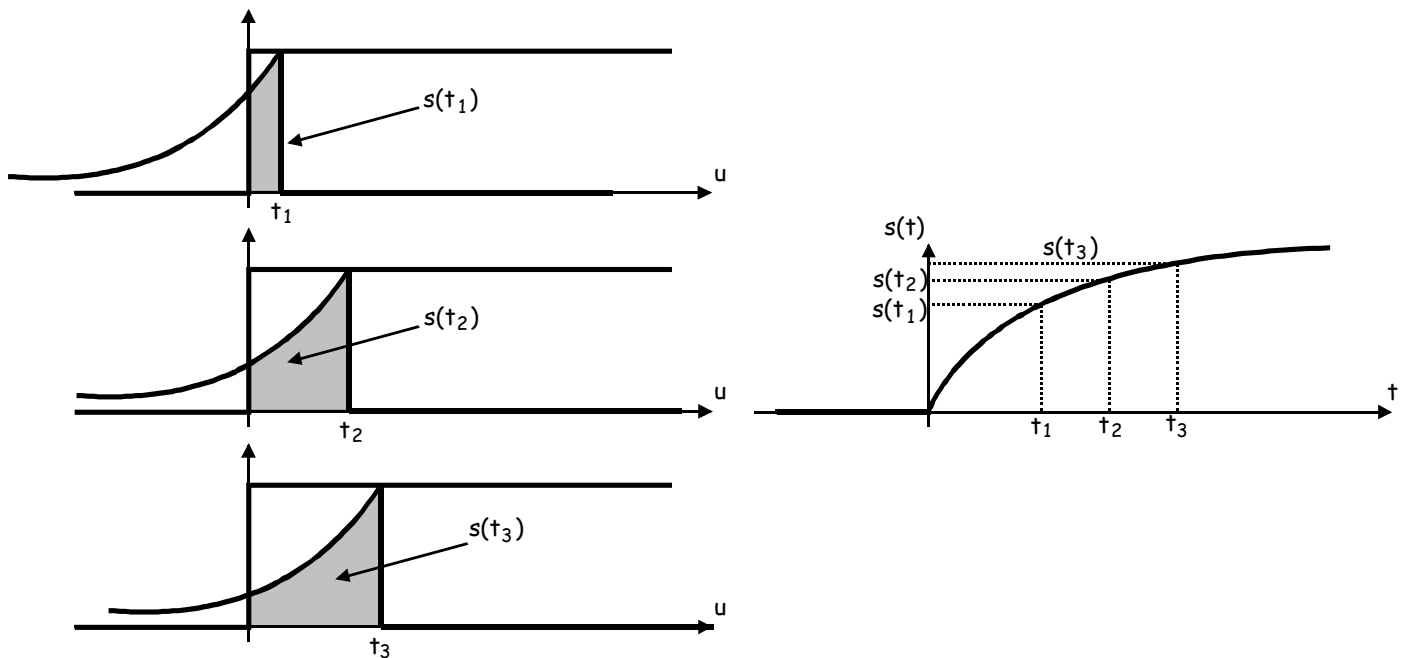
Le produit de convolution de $h(t)$ par $e(t)$ représente l'aire entre 0 et t du produit $h(t-u)e(u)$.

Dans l'exemple ci-dessous, on considère la réponse $s(t)$ à un échelon unitaire. La représentation de l'aire est alors plus compréhensible et correspond à $s(t)$ lorsque l'on décale t vers la droite.

Pour représenter $s(t)$ il faut donc pour chaque valeur de t calculer l'aire du produit $h(t-u)e(u)$.

On peut remarquer que pour obtenir $s(t)$ à un instant t , on a besoin de connaître la réponse impulsionnelle $h(t)$, mais aussi toute les valeurs passées de l'entrée $e(t)$.





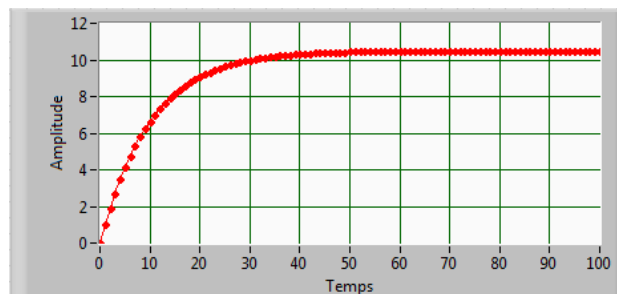
3. Application aux systèmes discrets :

Pour calculer $s(t)$, il faut connaître $e(t)$ et $h(t)$. Comme on travaille avec des signaux échantillonnés les signaux précédents deviennent $s(nT_e)$, $e(nT_e)$ et $h(nT_e)$ ou encore $s(n)$, $e(n)$ et $h(n)$. Le produit de convolution devient alors:

$$s(nT_e) = \sum_{i=0}^n h(nT_e - iT_e) e(iT_e) T_e.$$

4. Exercice :

La réponse à une impulsion Dirac d'un circuit R-C est $h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$. On peut calculer la réponse $s(t)$ du circuit pour le cas où $e(t)$ est un échelon unité avec : $s(t) = e(t) * h(t)$. Le graphe ci-dessous permet de comparer la réponse théorique et celle obtenue à partir du produit de convolution. Vérifier par le calcul que la forme d'onde ci-dessous est juste.

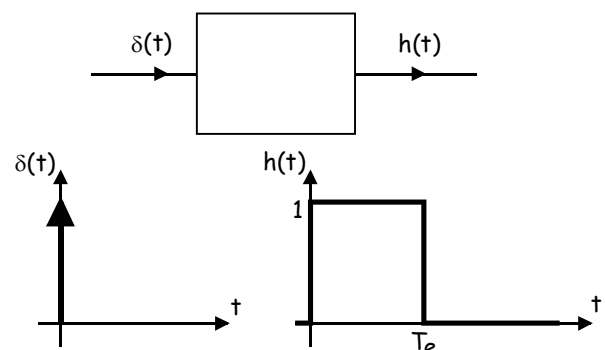


B. Cas d'un signal échantillonné-bloqué :

1. Principe :

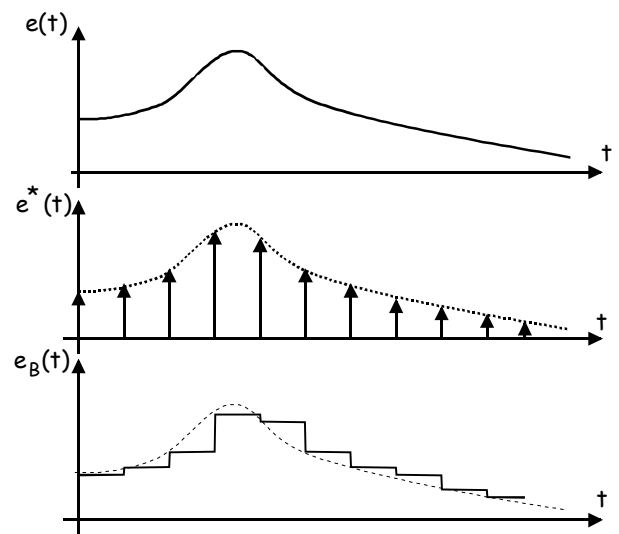
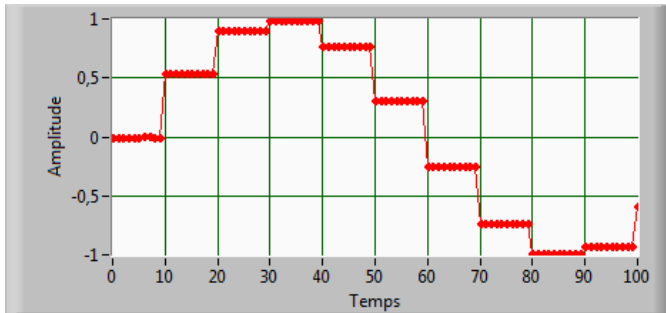
Le signal produit par un système numérique est constitué de marches d'escalier de durée constante T_e reproduisant approximativement la forme du signal.

Cette fonction est équivalente à un échantillonnage idéal (multiplication par un peigne de Dirac fictif) et le filtrage par un bloqueur. Chaque impulsion Dirac présente en entrée génère en sortie une impulsion de durée T_e et d'amplitude unitaire.



2. Réalisation :

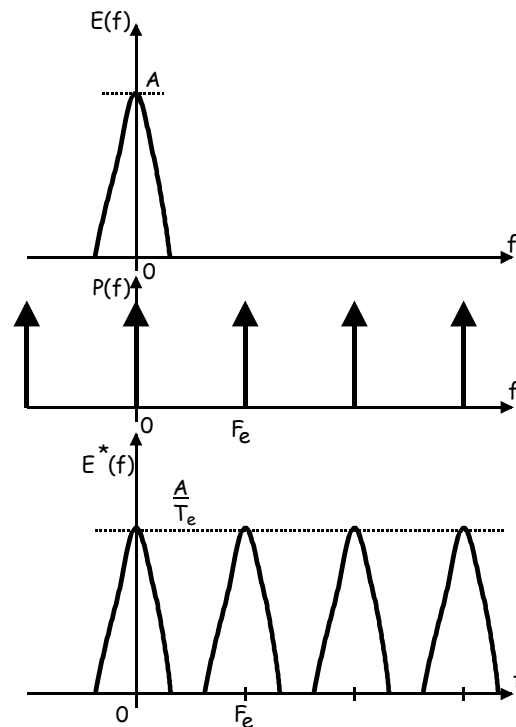
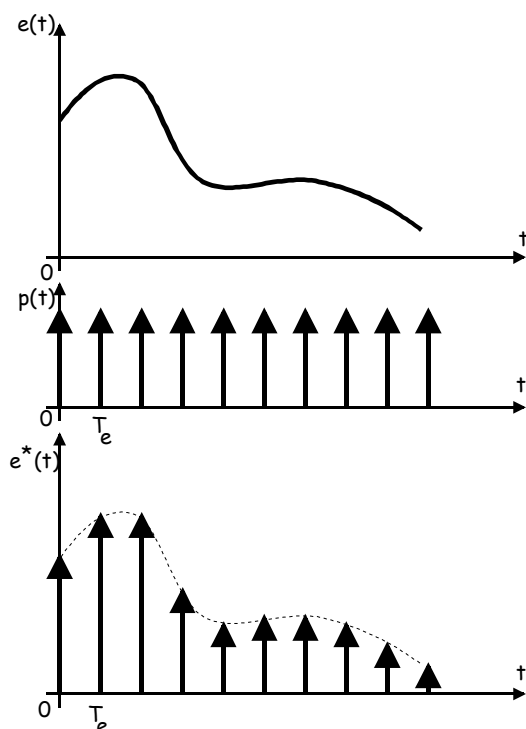
Chaque échantillon correspond à $e^*(t) = e(t) \times \delta(t - nT_e)$. Il faut donc diviser par T_e le produit de convolution pour tenir compte de la multiplication par une impulsion Dirac.



C. Spectre d'un signal échantillonné :

1. Principe :

On s'intéresse au spectre d'un signal échantillonné $e^*(t)$. La multiplication temporelle du signal $e(t)$ par un peigne Dirac, correspond dans le domaine fréquentiel à la convolution de la transformée $E(f)$ de $e(t)$ par le spectre du peigne de Dirac. Ce qui s'écrit $e^*(t) \Leftrightarrow E(f) * P(f)$.



2. Réalisation :

On peut reprendre ainsi toute les applications « temps-fréquence » du produit de convolution.