

Construction du nombre - didactique

Aspects du nombre

On identifie principalement trois raisons de manipuler les nombres : ils permettent de mémoriser une information et de la communiquer ; d'effectuer des comparaisons et d'ordonner ; d'anticiper le résultat d'une action. On peut utiliser trois registres pour représenter un nombre (entier), celui-ci pouvant coder des collections d'objets (aspect cardinal) ou des positions (aspect ordinal) : le registre analogique (par exemple, l'image d'une main ou d'une face de dé), le registre verbal et le registre symbolique.

D'autres types de représentations existent : représentation auditive (prononciation d'un mot-nombre, occurrence d'un bruit), gestuelle (langue des signes), etc.

Acquisition de la comptine numérique

Le processus d'acquisition de la suite numérique orale, ou comptine numérique (suite de mots permettant de désigner dans l'ordre jusqu'à un certain rang l'ensemble des nombres entiers) comprend différents stades :

- le stade "chapelet" fait référence au stade où l'élève a mémorisé une suite de mots et est capable de la réciter, sans pour autant donner sens à cette restitution,
- la chaîne insécable : l'élève peut réciter dans l'ordre une suite de nombres, mais la moindre perturbation lui fait perdre le fil de sa procédure ; il part systématiquement de l'unité,
- la chaîne sécable : l'élève peut surcompter et décompter ; le concept de nombre sans référence à une collection physique commence à être perçu,
- la chaîne terminale : la capacité d'abstraction se développe ; les automatismes et les techniques expertes se mettent progressivement en place.

Des irrégularités de la langue française compliquent l'acquisition de la comptine numérique : utilisation d'un mot différent pour chaque nombre jusqu'à seize, référence à des compositions additives et/ou multiplicatives (soixante-dix, quatre-vingts).

Principe de cardinalité

Un ensemble contenant un nombre fini d'éléments étant donné, on peut effectuer une énumération des éléments de cet ensemble : on passe en revue tous les éléments un par un, et une fois chacun, jusqu'à les avoir tous comptés. Au fur et à mesure que l'on compte les éléments de l'ensemble, on peut associer la partie des éléments comptés aux éléments de l'ensemble des entiers naturels en utilisant une (la) comptine numérique, c'est-à-dire une suite de mots permettant de désigner la suite ordonnée des nombres entiers (au sens mathématique, une comptine ne comporte que des noms d'entiers ; on pourra parler de comptine plus généralement avec des éléments non mathématiques, qu'elle soit segmentée ou non : "un, deux, trois, nous irons au bois, etc."). Lorsque tous les éléments ont été comptés, on obtient le cardinal de l'ensemble, qui est le dernier mot-nombre prononcé de la comptine numérique récitée. Cette procédure permettant de connaître le cardinal d'un ensemble fini est appelée principe de cardinalité.

On considère qu'une procédure de comptage est acquise lorsque l'élève :

- a mémorisé une comptine numérique, les mots étant utilisés dans le bon ordre sans oubli,
- possède une procédure permettant de passer en revue tous les éléments d'une collection sans double compte ni oubli,
- comprend que le cardinal d'une collection ne dépend pas de la nature des objets dénombrés, ni de leur emplacement ou de l'ordre dans lequel ils ont été énumérés,

- synchronise ses actions (doigts) avec l'énonciation de sa comptine,
- comprend que le dernier mot prononcé n'est pas une désignation-numéro du dernier objet compté, mais fait référence à l'ensemble des objets qui ont été comptés,

Ces principes (Gelman et Gallistel) font intervenir des compétences spatiales et motrices.

Procédures de dénombrement

Les activités numériques en maternelle sont essentiellement présentées sous forme de jeux ou de rituels de sorte à favoriser les échanges langagiers, ce qui permet l'imprégnation de la comptine numérique. Afin de réaliser ces activités, les élèves peuvent utiliser :

- la comparaison terme-à-terme (en s'aidant de leurs doigts),
- le subitizing (reconnaissance globale immédiate d'une petite quantité d'objets, environ 3 chez l'enfant et jusqu'à 6 chez l'adulte, parfois plus lorsque la collection est organisée),
- une représentation schématisée,
- le recomptage, qui revient à compter les éléments de la réunion de deux collections dont on connaît les cardinaux,
- le surcomptage, qui est une procédure de comptage avec changement d'initialisation,
- le décomptage (ou comptage à rebours),
- le double comptage.

La maîtrise de ces procédures est nécessaire pour le développement de techniques de calcul ultérieures : comptage de 10 en 10, de 2 en 2, etc.

Programmes pour le cycle 1

Trois documents officiels :

- [Programme d'enseignement pour l'acquisition des premiers outils mathématiques du cycle 1](#)
- [Livret d'accompagnement de programme - Acquisition des premiers outils mathématiques avant 4 ans](#)
- [Livret d'accompagnement de programme - Acquisition des premiers outils mathématiques à partir de 4 ans](#)

Exprimer une quantité par un nombre

Les jeunes enfants possèdent des intuitions très précoces sur les quantités. Ces intuitions leur permettent de comparer de façon approximative des quantités, voire d'effectuer des opérations arithmétiques simples sur de très petites quantités. Avant d'arriver à l'école maternelle, certains sont capables de verbaliser les premiers éléments de la suite ordonnée des noms des nombres (la comptine numérique) ou de numéroter un à un les objets d'une collection. Mais ces actions ne sont garanties ni de leur conception d'un nombre pour représenter une quantité, ni de leur compréhension qu'un nombre s'obtient en ajoutant un au nombre précédent et que cela correspond à l'ajout d'un objet à la collection précédente.

Les objectifs de l'école maternelle relatifs à la cardinalité des nombres (c'est-à-dire leur lien avec les quantités) sont de :

- comprendre que tout nombre s'obtient en ajoutant un au nombre précédent et que cela correspond à l'ajout d'une unité à la quantité précédente,
- comprendre qu'une quantité est indépendante de la nature et de la position des objets (taille, place occupée, organisation spatiale) au sein de collections,
- associer à une quantité un nombre représenté de différentes façons (représentations analogiques, nom des nombres, écriture chiffrée) et vice versa,
- dénombrer des collections et comparer des quantités à l'aide de procédures variées,
- composer et décomposer des nombres,
- ordonner des quantités,
- lire et écrire la représentation chiffrée des nombres de un à dix,
- installer les premières procédures pour effectuer des calculs simples correspondant à des situations d'ajout ou de retrait.

Le passage des intuitions précoces au sens abstrait des nombres et à l'installation d'opérations mentales se fait très progressivement à travers la manipulation, puis la représentation et la verbalisation (par les élèves, mais aussi par l'enseignant) des procédures mises en œuvre. La manipulation s'effectue d'abord sur des objets du quotidien (poupées, objets du coin cuisine, boîtes à œufs, figurines, etc.), puis sur des objets non figuratifs (jetons, cubes, etc.), sans oublier les doigts des deux mains. Les représentations des nombres sont d'abord analogiques (constellations de points, représentation des doigts) et orales (le nom des nombres) avant de prendre la forme de l'écriture chiffrée.

Pour développer la capacité de dénombrement d'une collection, on veillera, en début d'apprentissage, à faire comprendre que, pour passer d'un nombre au suivant, on lui ajoute un (**itération de l'unité**). On accompagnera cet apprentissage d'une verbalisation du type "un jeton et encore un jeton, cela fait deux jetons ; et encore un jeton, cela fait trois jetons", en l'associant au geste d'ajouter à chaque fois un jeton supplémentaire et de désigner la nouvelle collection obtenue. Cela permet d'éviter le numérotage, qui consiste à associer à chaque jeton le nom d'un nombre. Ce passage est indispensable à l'acquisition du principe de cardinalité selon lequel le dernier mot prononcé quand on récite "un, deux, trois, etc." représente la quantité d'objets énumérés. Une fois que les élèves ont compris le principe de cardinalité, ils peuvent dénombrer par simple énumération du nom des nombres en pointant un à un chacun des objets de la collection sans pointer deux fois le même et sans en oublier. La capacité d'énumération doit être enseignée en faisant varier la nature des collections et leur organisation spatiale, car les stratégies ne sont pas les mêmes selon que les objets sont déplaçables ou non.

Les élèves apprennent, dès trois ans, à comparer par correspondance terme à terme des cardinaux de collections contenant plus d'objets que les nombres dont ils maîtrisent déjà le sens. Ils peuvent également comparer globalement des cardinaux de collections très différents.

Il importe enfin de ne pas aborder l'écriture chiffrée des nombres avant d'en avoir installé le sens en termes de quantité, d'avoir utilisé le comptage avec les doigts et les représentations analogiques. Elle intervient au moment opportun, notamment pour communiquer par écrit sur des quantités.

Au-delà d'activités spécifiques sur la construction du nombre menées sur des temps dédiés, il convient de recourir aux nombres dans toutes les situations qui s'y prêtent.

Points de vigilance

Pour faciliter l'accès au caractère abstrait du nombre, on veillera à :

- varier la taille et la nature des objets dans les collections ; le nombre "trois" représente aussi bien trois éléphants que trois fourmis et le cardinal d'une collection de trois éléphants est plus petit que celui d'une collection de quatre fourmis,

- travailler sur des collections dont les objets sont disposés dans l'espace de différentes manières,
- ne pas introduire prématurément le nombre zéro, qui pourra cependant être rencontré dans le cadre de la résolution d'un problème de retrait ou de déplacement, par exemple : "j'ai mis cinq billes dans une boîte, puis j'en enlève trois, puis deux, combien en reste-t-il ?",
- s'assurer d'une bonne compréhension des nombres deux, puis trois, avant d'aborder des collections de quatre objets ; les résultats issus de recherches scientifiques indiquent que les élèves acquièrent successivement et dans l'ordre la compréhension des nombres inférieurs à cinq, cette acquisition s'étalant sur plusieurs mois ;
- s'assurer que les compositions et les décompositions des petits nombres (d'abord deux, puis trois, puis quatre) sont acquises avant d'en envisager d'autres ; ultérieurement et jusqu'à dix, la même attention doit être portée à l'élaboration progressive des quantités.

Exprimer un rang ou une position par un nombre

Si le nombre sert à exprimer une quantité, il sert aussi à repérer un rang dans une file ou une position dans un dispositif ordonné, à condition d'avoir choisi un point de départ et un sens de parcours. Cette conception spatiale du nombre est un élément essentiel en mathématiques. À l'école maternelle, l'élève découvre cette nouvelle fonction du nombre en manipulant des suites ordonnées d'objets ou de personnes et en jouant à des jeux de plateau comme le jeu de l'oie ou celui des petits chevaux. La transformation mentale permettant de relier un nombre à une position est facilitée par l'utilisation d'une bande à l'intérieur de laquelle s'organise la suite des nombres, de la gauche vers la droite, chaque nombre occupant une case, à un rang bien déterminé. La conception spatiale des nombres et leur représentation sur la bande numérique présentent plusieurs intérêts en termes d'apprentissage :

- visualiser que les nombres entiers sont répartis de manière régulière : quelle que soit leur valeur, deux nombres entiers consécutifs diffèrent de un ; la bande numérique préfigure la ligne numérique qui permettra à l'école élémentaire de représenter d'autres types de nombres (les fractions et les décimaux),
- élargir le sens des opérations entre nombres entiers : l'addition, déjà perçue comme l'ajout d'une quantité, est maintenant associée à un déplacement (dans le sens du parcours sur le plateau d'un jeu de l'oie, vers la droite sur une bande numérique).

Le fait qu'un nombre soit perçu à la fois comme une quantité et comme une position permet de résoudre des problèmes de deux natures différentes (d'une part ajout ou retrait, d'autre part déplacement dans un sens ou dans l'autre), mais relevant de la même procédure opératoire. Cette double conception du nombre aide à sa compréhension et facilite l'accès à son caractère abstrait.

Points de vigilance

De même que la connaissance de la comptine numérique (un, deux, trois, quatre, etc.) n'assure pas la compréhension du sens cardinal du nombre (exprimer une quantité), la récitation de la comptine des nombres ordinaux (premier, deuxième, troisième, quatrième, etc.) ne révèle pas la compréhension de la conception spatiale d'un nombre (un rang dans une file, une position dans un dispositif ordonné). Pour calculer l'effet d'un déplacement sur une position, il est d'ailleurs accepté d'utiliser le nom des nombres sous forme cardinale et non ordinale : ainsi, dans un jeu de l'oie ou de petits chevaux, une procédure de déplacement pourra être verbalisée par un élève sous la forme "si je suis sur le quatre et que j'avance de deux, je me retrouve sur le six", sans que l'élève recouvre nécessairement aux adjectifs ordinaux "quatrième" et "sixième". En revanche, ces termes sont utilisés par l'enseignant.