

Problèmes elliptiques linéaires

1. Parenthèse : Régularité elliptique et principe du maximum

1.1. Définitions et notations. On se donne un opérateur de la forme

$$(5) \quad u \mapsto Lu := - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij} \partial_j u) + \sum_k b^k \partial_k u + cu.$$

On suppose que $a^{ij}, b^k, c \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous i, j et que l'opérateur est elliptique, à savoir qu'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\sum_{i,j} a^{ij}(x) X_i X_j \geq \lambda \sum_i X_i^2 \text{ pour tout } x \in \Omega \text{ et } X \in \mathbb{R}^n.$$

Pour $f \in L^2(\Omega)$, on dira $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ est une solution faible de

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

si

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j} a^{ij} \partial_i u \partial_j \varphi \, dx + \int_{\Omega} b^k \partial_k u \varphi \, dx + \int_{\Omega} cu \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx$$

pour tout $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Pour $0 < \alpha < 1$, on dit que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est θ -Hölderienne s'il existe $L > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\theta$ pour tous $x, y \in \Omega$. On note $C^{0,\theta}(\Omega)$ l'ensemble de ces fonctions. Dans ce cas f se prolonge continuellement à $\overline{\Omega}$ et on définit la norme

$$\|f\|_{C^{0,\theta}} := \sup_{x \in \Omega} |f(x)| + \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\theta} < \infty.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note

$$C^{k,\theta}(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) \text{ tel que } \partial_\alpha f \in C^{0,\alpha}(\Omega) \text{ pour } |\alpha| = k\}$$

qu'on munit de la norme

$$\|f\|_{C^{k,\theta}} := \sum_{i=1}^k \|\nabla^i u\|_\infty + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|\partial_\alpha u(x) - \partial_\alpha u(y)|}{|x - y|^\theta}$$

1.2. Théorème général de régularité.

THÉORÈME 10. Soit Ω un ouvert C^∞ borné et $a^{ij}, b^k, c \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour tous i, j, k . On se donne un opérateur de la forme (5) et une fonction $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ une solution faible de

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Alors :

- Si $f \in L^p(\Omega)$, $2 \leq p < \infty$ (on reverra cet exposant plus tard), on a $u \in W^{2,p}(\Omega)$. De plus, il existe $C = C(\Omega, (a^{ij}), (b^k), c, p) > 0$ indépendant de u et f telle que

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq C (\|f\|_p + \|u\|_2).$$

- Si $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, $0 < \alpha < 1$, on a $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$. De plus, il existe $C = C(\Omega, (a^{ij}), (b^k), c, \alpha) > 0$ indépendant de u et f telle que

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq C (\|f\|_{C^{0,\alpha}} + \|u\|_2).$$

De plus, u et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 se prolongent continuellement à $\overline{\Omega}$. En particulier $u \in C^0(\overline{\Omega})$.

1.3. Principe du maximum. Les résultats et les preuves de cette section sont très fortement inspirés du chapitre 3 de l'ouvrage de Gilbarg-Trudinger [3].

L'idée essentielle : on se donne une fonction $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, Ω étant borné, telle que $-\Delta u > 0$ dans Ω . Soit $x_0 \in \overline{\Omega}$ un point de minimum de u . Si $x_0 \in \Omega$ est un point intérieur, alors $\nabla u(x_0) = 0$ et $Hess_{x_0}(u) \geq 0$ est positive au sens des formes bilinéaires. Ainsi $\Delta u(x_0) = Tr(Hess_{x_0}(u)) \geq 0$, ce qui contredit $-\Delta u > 0$. Et donc $x_0 \in \partial\Omega$. Ainsi $\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$. On a en fait un théorème bien plus général :

THÉORÈME 11 (Principe du maximum (minimum ?) dit faible). *Soit Ω un ouvert borné (non nécessairement régulier) et $a^{ij}, b^k, c \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour tous i, j, k . On se donne un opérateur de la forme (5) et $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. On suppose que*

$$c \equiv 0 \text{ et } Lu \geq 0 \text{ dans } \Omega.$$

Alors $\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$.

Dans le cas

$$c \geq 0 \text{ et } Lu \geq 0 \text{ dans } \Omega,$$

alors soit $u \geq 0$ soit $\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$, les deux situations pouvant se produire simultanément.

DÉMONSTRATION. Pour $\alpha > 0$ et $z_0 \in \mathbb{R}^n$, on définit $\varphi_{\alpha, z_0}(x) := e^{-\alpha|x-z_0|^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On calcul immédiat donne

$$\frac{L\varphi_{\alpha, z_0}}{\varphi_{\alpha, z_0}}(x) = -2\alpha \left(2\alpha \sum_{i,j} (x-z_0)_i a^{ij} (x-z_0)_j - Tr(a) + \sum_k (\partial_i a^{ik} + b^k)(x-z_0)_k \right) + c.$$

En utilisant l'ellipticité de l'opérateur, il vient

$$-\frac{L\varphi_{\alpha, z_0}}{\varphi_{\alpha, z_0}}(x) \geq 2\alpha \left(2\alpha \lambda |x-z_0|^2 - \sum_i \|a^{ii}\|_\infty - \sum_k \|\partial_i a^{ik} + b^k\|_\infty |x-z_0| \right) - \|c\|_\infty$$

Soit $R > 0$ tel que $\Omega \subset B(0, R)$ et soit $z_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $|z_0| = 2R$. On a alors $R < |x-z_0| < 3R$ pour tout $x \in \Omega$, et donc

$$-\frac{L\varphi_{\alpha, z_0}}{\varphi_{\alpha, z_0}}(x) \geq 2\alpha \left(2\alpha \lambda R^2 - \sum_i \|a^{ii}\|_\infty - \sum_k \|\partial_i a^{ik} + b^k\|_\infty 3R \right) - \|c\|_\infty$$

et donc pour $\alpha > 0$ assez grand, on récupère $L\varphi_{\alpha, z_0} < 0$ sur Ω .

Remarque : dans le cas particulier $\partial_i a^{ik} + b^k = 0$ et $c \geq 0$, on aurait pu inversement prendre $\alpha > 0$ petit pour cette fois récupérer $L\varphi_{\alpha, z_0} > 0$ sur Ω . C'est ce qui est fait en TD.

Pour $\epsilon > 0$, on obtient alors $L(u - \epsilon\varphi_{\alpha, z_0}) > 0$ dans Ω . Soit $x_\epsilon \in \bar{\Omega}$ tel que $\min_{\bar{\Omega}}(u - \epsilon\varphi_{\alpha, z_0}) = (u - \epsilon\varphi_{\alpha, z_0})(x_\epsilon)$.

Supposons que $x_\epsilon \in \Omega$ est un point intérieur. Dans ce cas,

$$\nabla(u - \epsilon\varphi_{\alpha, z_0})(x_\epsilon) = 0 \text{ et } Hess_{x_\epsilon}(u - \epsilon\varphi_{\alpha, z_0}) \geq 0.$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} L(u - \epsilon\varphi_{\alpha, z_0})(x_\epsilon) &= - \sum_{i,j} a^{ij}(x_\epsilon) \partial_{ij}(u - \epsilon\varphi_{\alpha, z_0})(x_\epsilon) + c(x_\epsilon)(u - \epsilon\varphi_{\alpha, z_0})(x_\epsilon) \\ &= -Tr((a^{ij}) Hess(u - \epsilon\varphi_{\alpha, z_0}))(x_\epsilon) + c(x_\epsilon)(u - \epsilon\varphi_{\alpha, z_0})(x_\epsilon) \end{aligned}$$

Comme (a^{ij}) est symétrique définie positive et la Hessienne est positive, on obtient alors $c(x_\epsilon)(u - \epsilon\varphi_{\alpha, z_0})(x_\epsilon) \geq L(u - \epsilon\varphi_{\alpha, z_0})(x_\epsilon) > 0$.

On distingue alors deux cas :

- (1) Si $c \equiv 0$, on obtient une contradiction et donc $x_\epsilon \in \partial\Omega$ et $\min_{\bar{\Omega}}(u - \epsilon\varphi_{\alpha, z_0}) = \min_{\partial\Omega}(u - \epsilon\varphi_{\alpha, z_0})$ pour tout $\epsilon > 0$. Comme φ_{α, z_0} est uniformément borné sur Ω borné, à la limite $\epsilon \rightarrow 0$, on obtient $\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$ et le résultat est démontré.
- (2) Si $c \geq 0$, il s'agit de $c(x_\epsilon)(u - \epsilon\varphi_{\alpha, z_0})(x_\epsilon) > 0$ que $(u - \epsilon\varphi_{\alpha, z_0})(x_\epsilon) > 0$ et donc $\min_{\bar{\Omega}}(u - \epsilon\varphi_{\alpha, z_0}) > 0$ si $x_\epsilon \in \Omega$.
 - (a) Supposons que $\min_{\partial\Omega} u < 0$. Alors pour $\epsilon > 0$ petit, $\min_{\partial\Omega}(u - \epsilon\varphi) < 0$ et donc $\min_{\partial\Omega}(u - \epsilon\varphi) < 0$, et donc $(u - \epsilon\varphi)(x_\epsilon) < 0$, ce qui est contradictoire. Donc $\min_{\bar{\Omega}}(u - \epsilon\varphi_{\alpha, z_0}) = \min_{\partial\Omega}(u - \epsilon\varphi_{\alpha, z_0})$ pour tout $\epsilon > 0$ assez petit. A la limite $\epsilon \rightarrow 0$, on obtient alors $\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u < 0$.
 - (b) Supposons maintenant que $\min_{\partial\Omega} u \geq 0$. En distinguant les situations dans lesquelles le minimum est atteint au bord ou pas, on obtient $\min_{\bar{\Omega}}(u - \epsilon\varphi_{\alpha, z_0}) \geq -\epsilon\|\varphi_{\alpha, z_0}\|_\infty$. A la limite $\epsilon \rightarrow 0$, on obtient $\min_{\bar{\Omega}} u \geq 0$ et donc $u \geq 0$.

Ceci prouve le théorème. $\square$

THÉORÈME 12 (Principe du maximum (minimum?) dit fort de Hopf). *Soit Ω un ouvert borné (non nécessairement régulier) connexe et $a^{ij}, b^k, c \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour tous i, j, k . On se donne un opérateur de la forme (5) et $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. On suppose que*

$$c \equiv 0 \text{ et } Lu \geq 0 \text{ dans } \Omega.$$

Alors $\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$, et ce minimum n'est atteint à l'intérieur que si u est constante.

Dans le cas

$$c \geq 0 \text{ et } Lu \geq 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } u \geq 0 \text{ dans } \Omega,$$

alors soit $u > 0$ dans Ω , soit $u \equiv 0$.

DÉMONSTRATION. Commençons par la situation suivante : supposons qu'il existe $x_0, y_0 \in \Omega$ tels que

$$(6) \quad u(x) > u(y_0) \text{ pour tout } x \in B(x_0, R) \text{ avec } R = |x_0 - y_0|.$$

On a va montrer le résultat suivant :

$$(7) \quad \text{si } \{c \equiv 0\} \text{ ou } \{c \geq 0 \text{ et } u(y_0) = 0\} \text{ alors } du_{y_0}(y_0 - x_0) < 0.$$

On fixe $0 < r < R$ et, comme dans la preuve du principe du maximum faible, on choisit $\alpha > 0$ assez grand afin d'avoir $L\varphi_{\alpha, x_0} < 0$ dans $B(x_0, R) - B(x_0, r)$. Le but est de minorer u sur $B(x_0, R) - B(x_0, r)$, afin de minorer la dérivée dans une certaine direction par un réel > 0 . On pose

$$v_\epsilon := u - u(y_0) - \epsilon(\varphi_{\alpha, x_0} - \varphi_{\alpha, x_0}(y_0)).$$

On note que $v_\epsilon(x) = u(x) - u(y_0) \geq 0$ pour $x \in \partial B(x_0, R)$. De plus, comme $u(x) > u(y_0)$ pour $x \in \partial B(x_0, r)$ compact, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour $0 < \epsilon < \epsilon_0$, $v_\epsilon(x) > 0$ pour $x \in \partial B(x_0, r)$. Ainsi

$$v_\epsilon \geq 0 \text{ sur } \partial(B(x_0, R) - B(x_0, r)).$$

Le calcul donne

$$Lv_\epsilon = Lu - cu(y_0) + \epsilon(-L\varphi_{\alpha, x_0} + \epsilon c\varphi_{\alpha, x_0}(y_0)) > -cu(y_0) + \epsilon c\varphi_{\alpha, x_0}(y_0) \text{ dans } B(x_0, R) - B(x_0, r).$$

Supposons que $c \equiv 0$. On a alors $Lv_\epsilon \geq 0$ dans $B(x_0, R) - B(x_0, r)$, et il suit du principe du maximum du Théorème 11 que $v_\epsilon \geq 0$ dans $B(x_0, R) - B(x_0, r)$.

Supposons que $c \geq 0$ et $u(y_0) = 0$. On a alors $Lv_\epsilon \geq 0$ et il suit du principe du maximum du Théorème 11 que $v_\epsilon \geq 0$ dans $B(x_0, R) - B(x_0, r)$.

Dans ces deux cas, on a

$$u(x) - u(y_0) \geq \epsilon(\varphi_{\alpha, x_0} - \varphi_{\alpha, x_0}(y_0)) \text{ dans } B(x_0, R) - B(x_0, r).$$

On dit alors que le membre de droite est une *fonction barrière*. L'avantage est que sa forme est explicite, et qu'on va pouvoir calculer sa dérivée. Pour $0 < t < 1 - \frac{r}{R}$, on a alors $y_0 - t(y_0 - x_0) \in B(x_0, R) - B(x_0, r)$ et donc

$$\frac{u(y_0 - t(y_0 - x_0)) - u(y_0)}{t} \geq \epsilon \frac{\varphi_{\alpha, x_0}(y_0 - t(y_0 - x_0)) - \varphi_{\alpha, x_0}(y_0)}{t} = \epsilon \frac{e^{-\alpha(1-t)^2 R^2} - e^{-\alpha R^2}}{t}$$

et à la limite $t \rightarrow 0^+$, on obtient $-du_{y_0}(y_0 - x_0) \geq 2\epsilon\alpha R^2 > 0$, ce qui prouve (7).

Reprenons la preuve du principe du maximum fort. On se donne $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ telle que $Lu \geq 0$. Supposons que l'infimum sur $\overline{\Omega}$ soit atteint en un point intérieur de Ω , mettons $x_m \in \Omega$. La fonction u étant non-constante, il existe $x_M \in \Omega$ tel que $u(x_M) > u(x_m) = \inf u$. Comme Ω est un ouvert connexe, il est connexe par arc et il existe un chemin $\gamma \in C^0([0, 1], \Omega)$ tel que $\gamma(0) = x_M$ et $\gamma(1) = x_m$. Comme $u \circ \gamma$ est continue, il existe $s_0 \in]0, 1]$ tel que $u(\gamma(s)) > \inf u$ et $u(\gamma(s_0)) = \inf u$. On prend alors $x_0 = \gamma(s_0 - \tau)$ avec $\tau > 0$ petit tel qu'il existe $\delta > 0$ tel que $B(x_0, \delta) \subset \Omega$ et $\gamma(s_0) \in B(x_0, \delta)$. On prend alors $R > 0$ tel que $u(x) > \inf u$ sur $B(x_0, R)$ et il existe $y_0 \in \partial B(x_0, R)$ tel que $u(y_0) = \inf u$. En particulier, $du_{y_0} = 0$

- Si $c \equiv 0$, il suit de (7) que $du_{y_0} \neq 0$, ce qui est contradictoire car c'est un infimum. Donc l'infimum n'est pas atteint en un point intérieur.
- Si $c \geq 0$ et $u \geq 0$, alors si u s'annule en un point intérieur, c'est un infimum qui vaut 0, et donc $u(y_0) = 0$. Il suit alors de (7) que $du_{y_0} \neq 0$, ce qui est contradictoire car c'est un infimum. Donc u ne s'annule pas à l'intérieur et donc $u > 0$ dans Ω .

□

Problèmes elliptiques non-linéaires sous-critiques

On se donne comme précédemment Ω un ouvert borné C^∞ de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pour un exposant $p > 1$, on cherche à obtenir l'existence d'une fonction $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ de

$$(8) \quad \begin{cases} -\Delta u + au = u^p & \text{dans } \Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pour cela, on va définir une notion de solution faible et, comme dans le cas du problème de valeur propre, on va chercher des solutions sous la forme de points critiques de la fonctionnelle :

$$u \mapsto I(u) := \frac{\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + au^2) dx}{\left(\int_{\Omega} |u|^{p+1} dx\right)^{\frac{2}{p+1}}}$$

qui est définie pour $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$, $u \not\equiv 0$. Le problème est que cet espace est naturellement muni de la norme $\|\cdot\|_{H_0^1} + \|\cdot\|_{p+1}$ qui n'a pas de bonnes propriétés. Par exemple, pour certaines valeurs de p et pour $a > 0$, l'infimum de J est nul, ce qui va exclure de trouver des minimiseurs. Il faudrait pour bien faire que $\|\cdot\|_{H_0^1}$ et $\|\cdot\|_{p+1}$ soient comparables (on n'ose espérer équivalentes). Cela va être l'objet des plongements de Sobolev.

1. Plongement de Sobolev

L'idée générale est que lorsque $|\nabla u| \in L^p$, alors $u \in L^q$ pour un certain $q > p$.

1.1. Quel est l'unique exposant possible ? On se donne $p, q \geq 1$ et on suppose qu'il existe $C > 0$ tel que

$$(9) \quad \|u\|_q \leq C \|\nabla u\|_p \text{ pour tout } u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

On se donne $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ non identiquement nulle. Pour $\lambda > 0$, on définit $u_\lambda(x) := u(\lambda x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On a ainsi $u_\lambda \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, et donc, (9) donne

$$\|u_\lambda\|_q \leq C \|\nabla u_\lambda\|_p.$$

On changement de variable donne alors

$$\|u_\lambda\|_q = \lambda^{-\frac{n}{q}} \|u\|_q \text{ et } \|\nabla u_\lambda\|_p = \lambda^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_p,$$

et donc

$$\lambda^{\frac{n}{p}-1-\frac{n}{q}} \|u\|_q \leq C \|u\|_p.$$

Comme $\|u\|_q > 0$, en faisant tendre λ vers 0 d'une part, et vers l'infini d'autre part, on obtient $\frac{n}{p} - 1 - \frac{n}{q} = 0$, et donc

$$p < n \text{ et } q = \frac{np}{n-p}.$$

Ainsi, $p \geq 1$ étant donné, l'invariance de $\mathbb{R}^n$ par les dilatations impose une unique valeur de q telle que (9) soit (éventuellement) valide. Le théorème de Sobolev qui suit montre qu'avec cet exposant, l'inégalité est justement valide.

1.2. Théorème de Sobolev pour $W^{1,p}$.

THÉORÈME 13. Soit Ω un ouvert borné C^∞ de $\mathbb{R}^n$. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Alors

- Si $p < n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{\frac{pn}{n-p}}(\Omega)$ et le plongement est continu, au sens où il existe $C = C(p, n, \Omega) > 0$ tel que

$$\|u\|_{L^{\frac{pn}{n-p}}} \leq C \|u\|_{W^{1,p}} \text{ pour tout } u \in W^{1,p}(\Omega).$$

- Si $p = n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ pour tout $1 < q < \infty$ et le plongement est continu, au sens où il existe $C = C(p, n, q, \Omega) > 0$ tel que

$$\|u\|_{L^q} \leq C \|u\|_{W^{1,p}} \text{ pour tout } u \in W^{1,p}(\Omega).$$

- Si $p > n$, alors il existe $\alpha \in (0, 1)$ tel que $W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,1-\frac{n}{p}}(\Omega)$ et le plongement est continu, au sens où il existe $C = C(p, n, \Omega) > 0$ tel que

$$\|u\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}} \leq C \|u\|_{W^{1,p}} \text{ pour tout } u \in W^{1,p}(\Omega).$$

1.3. Le cas particulier $p = 2$.

THÉORÈME 14. Soit Ω un ouvert borné C^∞ de $\mathbb{R}^n$. Alors

- Si $n > 2$, alors $W^{1,2}(\Omega) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ et le plongement est continu, au sens où il existe $C = C(p, n, \Omega) > 0$ tel que

$$\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \leq C \|u\|_{W^{1,2}} \text{ pour tout } u \in W^{1,2}(\Omega).$$

- Si $n = 2$, alors $W^{1,2}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ pour tout $1 < q < \infty$ et le plongement est continu, au sens où il existe $C = C(p, n, q, \Omega) > 0$ tel que

$$\|u\|_{L^q} \leq C \|u\|_{W^{1,2}} \text{ pour tout } u \in W^{1,2}(\Omega).$$

- Si $n = 1$, alors $W^{1,2}(\Omega) \subset C^{0,1/2}(\Omega)$ et le plongement est continu, au sens où il existe $C = C(\Omega) > 0$ tel que

$$\|u\|_{C^{0,1/2}} \leq C \|u\|_{W^{1,2}} \text{ pour tout } u \in W^{1,2}(\Omega).$$

1.4. Théorème de Sobolev pour $W^{k,p}$, $k \geq 2$. Le cas $k \geq 2$ est techniquement plus délicat à rédiger lorsque $kp > n$ car l'exposant de Hölder $1 - \frac{n}{p}$ du Théorème 13 est a priori remplacé par $k - \frac{n}{p}$ qui peut être ≥ 1 , et surtout peut être lui-même un entier. Il y a alors plusieurs cas à étudier, ce qui est parfaitement énoncé dans Brezis [2]. Dans le cadre de ce cours, on se contentera du résultat suivant qui est conséquence du théorème XXX de [2] :

THÉORÈME 15. Soit Ω un ouvert borné C^∞ de $\mathbb{R}^n$. Soit $1 \leq p \leq \infty$ et $k \geq 1$ un entier. Alors

- Si $kp < n$, alors $W^{k,p}(\Omega) \subset L^{\frac{pn}{n-kp}}(\Omega)$ et le plongement est continu, au sens où il existe $C = C(p, k, n, \Omega) > 0$ tel que

$$\|u\|_{L^{\frac{pn}{n-kp}}} \leq C \|u\|_{W^{k,p}} \text{ pour tout } u \in W^{k,p}(\Omega).$$

- Si $kp = n$, alors $W^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ pour tout $1 < q < \infty$ et le plongement est continu, au sens où il existe $C = C(p, k, n, q, \Omega) > 0$ tel que

$$\|u\|_{L^q} \leq C \|u\|_{W^{k,p}} \text{ pour tout } u \in W^{k,p}(\Omega).$$

- Si $kp > n$, alors il existe $\alpha \in (0, 1)$ tel que $W^{k,p}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\Omega)$ et le plongement est continu, au sens où il existe $C = C(p, k, n, \alpha, \Omega) > 0$ tel que

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}} \leq C \|u\|_{W^{k,p}} \text{ pour tout } u \in W^{k,p}(\Omega).$$

1.5. Théorème de Rellich-Kondrakov. Dans le cas du problème de valeur propre, on a vu l'importance du plongement compact $H_0^1 \hookrightarrow L^2$. On peut faire mieux que L^2 en fait comme énoncé dans ce théorème :

THÉORÈME 16. Soit Ω un ouvert borné C^∞ de $\mathbb{R}^n$. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Alors

- Si $p < n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ pour tout $q < \frac{pn}{n-p}$ et le plongement est compact.
- Si $p = n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ pour tout $1 < q < \infty$ et le plongement est compact.
- Si $p > n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset C^0(\Omega)$ et le plongement est compact.

En particulier, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ est compact.

1.6. Un "Bolzano-Weierstraß" sur les Sobolev. En effectuant plusieurs extractions successives, et en utilisant la compacité faible des suites bornées du Théorème XX et le plongement compacts du Théorème 16, on obtient le corollaire suivant :

THÉORÈME 17. Soit Ω un ouvert borné C^∞ de $\mathbb{R}^n$. Soit $1 < p < \infty$. Soit $(u_i)_i$ une suite telle que $u_i \in W^{1,p}(\Omega)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Alors il existe $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et une sous-suite $(u_{j(i)})$ telles que lorsque $i \rightarrow +\infty$:

$$u_{j(i)} \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } W^{1,p}(\Omega)$$

$$u_{j(i)} \rightarrow u \text{ fortement dans } L^q(\Omega) \text{ pour tout } \begin{cases} 1 \leq q < \frac{pn}{n-p} & \text{si } p < n, \\ 1 \leq q < \infty & \text{si } p \geq n. \end{cases}$$

2. Méthode de minimisation

2.1. Formulation faible et restriction sur p . En multipliant l'équation (8) par $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ et en intégrant par parties, on obtient

$$\int_{\Omega} ((\nabla u, \nabla \varphi) + au\varphi) dx = \int_{\Omega} u^p \varphi dx.$$

On veut alors donner un sens à cette expression lorsque $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$. Pour le membre de gauche, il n'y a aucun problème, cela a déjà été fait. Pour le membre de droite, il va falloir regarder de plus près. On a vu que $H_0^1 \hookrightarrow L^{2^*}$ avec $2^* := \frac{2n}{n-2}$ lorsque $n \geq 3$, et donc $u, \varphi \in L^{2^*}(\Omega)$, puis $u^p \in L^{2^*/p}$. En appliquant l'inégalité de Hölder à $\int_{\Omega} |u^p \times \varphi \times 1| dx$, on s'aperçoit que l'intégrale est finie lorsque

$$\frac{p}{2^*} + \frac{1}{2^*} \leq 1 \text{ c'est à dire } p \leq 2^* - 1 = \frac{n+2}{n-2}.$$

C'est ainsi qu'on voit apparaître l'exposant dit critique. Ceci nous amène à la définition suivante d'une solution faible :

Définition 18. Soit Ω un ouvert borné C^∞ de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. On se donne $1 < p \leq 2^* - 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution faible de

$$(10) \quad \begin{cases} -\Delta u + au = \lambda |u|^{p-1}u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

si

$$(11) \quad \int_{\Omega} ((\nabla u, \nabla \varphi) + au\varphi) dx = \int_{\Omega} \lambda |u|^{p-1} u \varphi dx \text{ pour tout } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Privilégier l'écriture $|u|^{p-1}u$ plutôt que u^p alors que $u \geq 0$ sera justifié dans la formulation variationnelle qui suit.

2.2. Formulation variationnelle. On se donne $u \in H_0^1(\Omega)$ une solution faible de (8), c'est-à-dire $u \geq 0$, $u \not\equiv 0$ qui vérifie (11). Notons

$$A(u) := \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + au^2) dx \text{ pour tout } u \in H_0^1(\Omega).$$

Un calcul immédiat donne que pour tous $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\frac{d}{dt} A(u + t\varphi)|_{t=0} = 2 \int_{\Omega} ((\nabla u, \nabla \varphi) + au\varphi) dx,$$

c'est-à-dire le membre de gauche de (11) à multiplication par une constante près. Pour le membre de droite, c'est un peu plus technique. Notons

$$(12) \quad B(u) := \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx \text{ pour tout } u \in H_0^1(\Omega).$$

Fixons $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$. Montrons que

$$(13) \quad \frac{d}{dt} B(u + t\varphi)|_{t=0} = (p+1) \int_{\Omega} |u|^{p-1} u \varphi dx.$$

La remarque sous-jacente est que pour $p > 1$, la fonction $x \mapsto |x|^{p+1}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ malgré la valeur absolue.

On utilise pour cela l'identité suivante : il existe $C(p) > 0$ tel que

$$||a + b|^{p+1} - |a|^{p+1} - (p+1)|a|^{p-1}ab| \leq C(p) (|a|^{p-1}b^2 + |b|^{p+1})$$

pour tous $a, b \in \mathbb{R}$. L'inégalité étant évidente si $a = 0$ et $C(p) \geq 1$, on suppose que $a \neq 0$ et, en posant $t = b/a$, l'inégalité est équivalente à prouver que $||1 + t|^{p+1} - 1 - (p+1)t| \leq C(p) (t^2 + |t|^{p+1})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui est vérifié en faisant un développement limité en 0 et en prenant $C(p) > 0$ assez grand. On obtient alors

$$\begin{aligned} \left| B(u + t\varphi) - B(u) - (p+1)t \int_{\Omega} |u|^{p-1} u \varphi dx \right| &\leq C(p) \left(t^2 \int_{\Omega} |u|^{p-1} \varphi^2 dx + |t|^{p+1} \int_{\Omega} |\varphi|^{p+1} dx \right) \\ &\leq C(p) \left(t^2 \|u\|_{p+1}^{p-1} \|\varphi\|_{p+1}^2 + |t|^{p+1} \int_{\Omega} |\varphi|^{p+1} dx \right) \end{aligned}$$

via l'inégalité de Hölder. Sachant que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ car $p+1 \leq 2^*$ et Ω est borné, on obtient la limite annoncée en (13).

On pose alors

$$(14) \quad I(u) := \frac{\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + au^2) dx}{\left(\int_{\Omega} |u|^{p+1} dx \right)^{\frac{2}{p+1}}} = \frac{A(u)}{B(u)^{\frac{2}{p+1}}}$$

pour $u \in H_0^1(\Omega) - \{0\}$. Pour $u \in H_0^1(\Omega) - \{0\}$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, il existe $t_0 > 0$ tel que $u + t\varphi \neq 0$ pour tout $-t_0 < t < t_0$ et on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(u + t\varphi)|_{t=0} &= \frac{\frac{d}{dt} A(u + t\varphi) B(u)^{\frac{2}{p+1}} - A(u) \frac{d}{dt} B(u + t\varphi)^{\frac{2}{p+1}}}{B(u)^{\frac{4}{p+1}}} \\ &= \frac{1}{B(u)^{\frac{2}{p+1}}} \left(\frac{d}{dt} A(u + t\varphi) - \frac{2A(u)}{(p+1)B(u)} \frac{d}{dt} B(u + t\varphi) \right) \\ &= \frac{2}{B(u)^{\frac{2}{p+1}}} \left(\int_{\Omega} ((\nabla u, \nabla \varphi) + au\varphi) dx - \frac{A(u)}{B(u)} \int_{\Omega} |u|^{p-1} u \varphi dx \right) \end{aligned}$$

$$(15) \quad \left\{ \frac{d}{dt} I(u + t\varphi)|_{t=0} = 0 \text{ pour tout } \varphi \in H_0^1(\Omega) \right\}$$

$$(16) \quad \Leftrightarrow \left\{ u \text{ sol. faible de } \begin{cases} -\Delta u + au = \frac{A(u)}{B(u)} |u|^{p-1} u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \right\}.$$

Et donc, une manière de récupérer des solutions faibles est de trouver des points critiques de I sous forme de minima.

2.3. Obtention d'une solution faible. Afin de réaliser des solutions comme des minimiseurs, nous allons faire des hypothèses successives afin de déterminer lesdits minimiseurs. Supposons que

$$(17) \quad -\Delta + a \text{ est coercif,}$$

c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$(18) \quad \int_{\Omega} (|\nabla \varphi|^2 + a\varphi^2) dx \geq \alpha \|\varphi\|_{H^1}^2 \text{ pour tout } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

On rappelle que $p+1 \leq 2^*$. Il suit donc des plongements de Sobolev (Theorem 14) qu'il existe $C_p(\Omega) > 0$ tel que

$$(19) \quad \left(\int_{\Omega} |u|^{p+1} dx \right)^{\frac{2}{p+1}} \leq C_p(\Omega) \|u\|_{H^1}^2$$

2.3.1. *Etape 1* : I est minorée sur $H_0^1(\Omega) - \{0\}$, et l'infimum est strictement positif.

Pour $u \in H_0^1(\Omega) - \{0\}$, il suit de (18) et (19) que

$$I(u) = \frac{\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + au^2) dx}{\left(\int_{\Omega} |u|^{p+1} dx \right)^{\frac{2}{p+1}}} \geq \frac{\alpha \|u\|_{H^1}^2}{C_p(\Omega) \|u\|_{H^1}^2} = \frac{\alpha}{C_p(\Omega)}$$

Ainsi, $H_0^1(\Omega) - \{0\}$ étant non-vide,

$$m := \inf \{ I(u) / u \in H_0^1(\Omega) - \{0\} \} \text{ existe et } m \geq \frac{\alpha}{C_p(\Omega)} > 0.$$

On en déduit donc l'existence d'une suite $(\hat{u}_k)_k$ telle que $\hat{u}_k \in H_0^1(\Omega) - \{0\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} I(\hat{u}_k) = m$. En posant $u_k := \frac{\hat{u}_k}{\|\hat{u}_k\|_{p+1}}$, on obtient

$$u_k \in H_0^1(\Omega), \quad \|u_k\|_{p+1} = 1 \text{ et } \lim_{k \rightarrow +\infty} I(u_k) = m.$$

2.3.2. *Etape 2* : La suite (u_k) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

En effet, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $I(u_k) \leq m + 1$ pour tout $k \geq k_0$. Il suit de la coercivité que $\|u_k\|_{H^1}^2 \leq \alpha^{-1}(m + 1)$ pour tout $k \geq k_0$, ce qui prouve le résultat.

2.3.3. *Etape 3* : Extraction. Il suit alors du Théorème 17 qu'il existe une sous-suite $(u_{j(k)})_k$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ tels que

$$u_{j(k)} \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega)$$

$$u_{j(k)} \rightarrow u \text{ fortement dans } L^q(\Omega) \text{ pour tout } 1 \leq q < 2^*$$

La fonctionnelle I étant continue pour la topologie forte, mais pas pour la topologie faible, on ne peut pas déduire immédiatement la convergence de $I(u_{j(k)})$ vers $I(u)$. Il faut encore un peu de travail.

2.3.4. *Etape 4* : Posons $\theta_k := u_{j(k)} - u$, de sorte que $\theta_k \rightharpoonup 0$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ et $\theta_k \rightarrow 0$ fortement dans $L^q(\Omega)$ pour tout $1 \leq q < 2^*$. En développant le produit scalaire, on obtient

$$\begin{aligned} A(u_{j(k)}) &= A(u + \theta_k) = \int_{\Omega} (|\nabla(u + \theta_k)|^2 + a(u + \theta_k)^2) dx \\ &= \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + au^2) dx + 2 \int_{\Omega} ((\nabla u, \nabla \theta_k) + au\theta_k) dx + \int_{\Omega} (|\nabla \theta_k|^2 + a\theta_k^2) dx \end{aligned}$$

On va réduire cette expression grâce à la convergence faible. On pose

$$\begin{aligned} T : H_0^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \int_{\Omega} ((\nabla u, \nabla \varphi) + au\varphi) dx \end{aligned}$$

La fonction T est trivialement linéaire. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} |T(\varphi)| &\leq \int_{\Omega} |(\nabla u, \nabla \varphi) + |a| \cdot |u\varphi|) dx \leq \int_{\Omega} (|\nabla u| \cdot |\nabla \varphi| + \|a\|_{\infty} \cdot |u| \cdot |\varphi|) dx \\ &\leq \|\nabla u\|_2 \|\nabla \varphi\|_2 + \|a\|_{\infty} \|u\|_2 \|\varphi\|_2 \leq (1 + \|a\|_{\infty}) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ainsi $T : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. Comme on a convergence faible $\theta_k \rightharpoonup 0$ dans $H_0^1(\Omega)$, on obtient $\lim_{k \rightarrow +\infty} T(\theta_k) = 0$. On récupère ainsi

$$(20) \quad A(u_{j(k)}) = A(u) + \int_{\Omega} (|\nabla \theta_k|^2 + a\theta_k^2) dx + o(1).$$

Il faut maintenant traiter la convergence du dénominateur. Comme $B(u_{j(k)}) = \|u_{j(k)}\|_{p+1}^2$ en imposant la restriction

$$p + 1 < 2^*$$

il vient que $u_{j(k)} \rightarrow u$ dans $L^{p+1}(\Omega)$ et donc

$$B(u_{j(k)}) = \|u\|_{p+1}^{p+1} + o(1) = B(u) + o(1).$$

En particulier, comme $B(u_{j(k)}) = 1$, on obtient $B(u) = \|u\|_{p+1}^{p+1} = 1$, donc en particulier $u \neq 0$. En utilisant que $B(u_{j(k)}) = 1$ et $B(u) = 1$ et le développement (20), on obtient

$$I(u_{j(k)}) = A(u_{j(k)}) = A(u) + \int_{\Omega} (|\nabla \theta_k|^2 + a\theta_k^2) dx + o(1) = I(u) + \int_{\Omega} (|\nabla \theta_k|^2 + a\theta_k^2) dx + o(1)$$

2.3.5. *Etape 5* : On peut maintenant conclure. La coercivité et la limite $I(u_{j(k)}) \rightarrow m$ donne

$$\alpha \|\theta_k\|_{H^1}^2 \leq \int_{\Omega} (|\nabla \theta_k|^2 + a\theta_k^2) dx = m - I(u) + o(1).$$

Par définition de l'infimum, on a $I(u) \geq m$, on en déduit donc que

$$I(u) = m \text{ et } \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\theta_k\|_{H^1} = 0.$$

Par conséquent l'infimum est atteint en $u \neq 0$ et, en prime, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_{j(k)} = u$ dans $H_0^1(\Omega)$: la suite converge finalement fortement.

Le point u étant un point de minimum, pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, on a $\frac{d}{dt}I(u + t\varphi)|_{t=0} = 0$. Il suit donc de (15) que

$$\int_{\Omega} ((\nabla u, \nabla \varphi) + au\varphi) dx = \frac{A(u)}{B(u)} \int_{\Omega} |u|^{p-1} u \varphi dx \text{ pour tout } \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

et donc $u \in H_0^1(\Omega) - \{0\}$ est solution faible de

$$(21) \quad \begin{cases} -\Delta u + au = \lambda |u|^{p-1} u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $\lambda := \frac{A(u)}{B(u)} > 0$ par coercivité.

Attendu que $|u| \in H_0^1(\Omega)$ et que $\nabla |u| = |\nabla u|$ pp sur Ω , on obtient que $I(|u|) = I(u) = m$, et donc $|u|$ est aussi un minimiseur. Quitte à remplacer u par $|u|$, on pourra supposer que $u \geq 0$, $u \neq 0$.

Il faut maintenant montrer que la solution est forte, c'est-à-dire C^2 . L'équation étant non-linéaire, l'argument utilisé pour le problème de valeurs propre ne fonctionne pas.

2.4. Solution forte et conclusion. Le principe est d'utiliser plusieurs fois la régularité elliptique. De façons schématique, on va procéder ainsi :

$$u \in L^q \Rightarrow u^p \in L^{\frac{q}{p}} \Rightarrow -\Delta u + \dots = u^p \in L^{\frac{q}{p}} \Rightarrow u \in W^{2, \frac{q}{p}} \hookrightarrow L^r \text{ avec } r > q$$

via les plongements de Sobolev. On gagne ainsi de l'intégrabilité sur u . En réitérant cet argument, on parvient à montrer que u est dans tous les L^q . Cet argument est appelé **bootstrap**.

Une fois qu'on aura $u \in L^q$ pour tout q , on prendra $q \gg 1$ de sorte que dans le raisonnement précédent, $W^{2, \frac{q}{p}} \hookrightarrow C^{0, \theta}$ pour un certain $0 < \theta < 1$, et donc $u \in C^{0, \theta}$. En utilisant la régularité Hölderienne, on obtiendra enfin que $u \in C^2$ est une solution forte. Il reste maintenant à appliquer proprement ce principe de bootstrap.

Attention cependant : le Théorème 10 de régularité imposait de commencer par un exposant ≥ 2 car il n'y avait pas moyen de donner un sens à la formulation faible de $-\Delta u + au = f$ si $f \in L^q$, $q \geq 2$. On peut cependant améliorer grâce aux plongements de Sobolev. En effet, pour $n \geq 3$, supposons que $f \in L^{(2^*)'}(\Omega)$ avec $(2^*)' = \frac{2n}{n+2}$ et pour $\varphi \in H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$, on a $f\varphi \in L^1(\Omega)$, et donc la formulation faible fait sens pour un tel f . Le théorème de régularité peut alors être amélioré avec l'énoncé suivant :

THÉORÈME 19. Soit Ω un ouvert C^∞ borné et $a^{ij}, b^k, c \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour tous i, j, k et L un opérateur comme dans (5). On se donne une fonction $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^{(2^*)}'(\Omega) = \mathbf{L}^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$ et $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ une solution faible de

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Alors :

- Si $f \in L^p(\Omega)$, $\frac{2n}{n+2} = (2^*)' \leq p < \infty$ (on reverra cet exposant plus tard), on a $u \in W^{2,p}(\Omega)$. De plus, il existe $C = C(\Omega, (a^{ij}), (b^k), c, p) > 0$ indépendant de u et f telle que

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq C (\|f\|_p + \|u\|_2).$$

- Si $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, $0 < \alpha < 1$, on a $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$. De plus, il existe $C = C(\Omega, (a^{ij}), (b^k), c, \alpha) > 0$ indépendant de u et f telle que

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq C (\|f\|_{C^{0,\alpha}} + \|u\|_2).$$

De plus, u et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 se prolongent continuellement à $\overline{\Omega}$. En particulier $u \in C^0(\overline{\Omega})$.

2.4.1. Etape 1 : Montrons que $u \in L^\infty(\Omega)$.

Comme $u \in H_0^1(\Omega)$, il suit des plongements de Sobolev que $u \in L^{2^*}(\Omega)$. Soit donc $q \geq 2^*$ tel que $u \in L^q(\Omega)$. On a immédiatement que $|u|^{p-1}u \in L^{\frac{q}{p}}(\Omega)$ ce qui fait sens car $\frac{q}{p} \geq \frac{2^*}{p} > \frac{2^*}{2^*-1} = \frac{2n}{n+2}$ (c'est pour cela qu'on a du améliorer le Théorème 10. Or $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution faible de (21). Il suit donc du Théorème 19 de régularité que $u \in W^{2,\frac{q}{p}}(\Omega)$. On applique alors le Théorème 15 de plongement de Sobolev et on distingue plusieurs cas :

- Si $2\frac{q}{p} < n$, il vient $u \in L^r(\Omega)$ avec $\frac{1}{r} = \frac{p}{q} - \frac{2}{n}$;
- Si $2\frac{q}{p} = n$, il vient $u \in L^r(\Omega)$ pour tout $r \geq 1$;
- Si $2\frac{q}{p} > n$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $u \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$ et donc $u \in L^r(\Omega)$ pour tout $r \geq 1$.

On va donc construire par récurrence une suite $(q_i)_{i \geq 1} \in [2^*, +\infty]^{\mathbb{N}}$ comme suit :

$$\begin{cases} q_1 := 2^* \\ q_{i+1} := \begin{cases} \frac{nq_i}{np-2q_i} & \text{si } q_i < \frac{pn}{2} \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Montrons par récurrence que $q_i \geq 2^*$ pour tout $i \geq 1$. C'est évident pour $i = 1$. Supposons que ce soit valide pour un certain $i \geq 1$. Si $q_i \geq \frac{pn}{2}$, alors $q_{i+1} = \infty$ et c'est bon. Si $q_i < \frac{pn}{2}$, alors

$$(22) \quad \frac{1}{q_{i+1}} - \frac{1}{q_i} = \frac{p-1}{q_i} - \frac{2}{n} \leq \frac{p-1}{q_1} - \frac{2}{n} = \frac{n-2}{2n} (p - (2^* - 1)) < 0$$

et donc $q_{i+1} > q_i \geq 2^*$. Dans tous les cas, l'assertion est vraie pour $i + 1$. Elle est donc vraie pour tout i et par la suite $q_i \geq 2^*$ pour tout $i \geq 1$.

En reprenant l'inégalité (22), on vérifie alors aisément que $q_{i+1} \geq q_i$ pour tout $i \geq 1$. Montrons que (q_i) stationne en ∞ . Sinon, $q_i < \infty$ pour tout i et on a

$$2^* \leq q_i < \frac{pn}{2} \text{ et } q_{i+1} = \frac{nq_i}{np-2q_i} \text{ pour tout } i \geq 1.$$

Comme la suite est croissante et majorée, elle converge vers une limite l qui vérifie

$$2^* \leq l \leq \frac{pn}{2} \text{ et } l = \frac{nl}{np - 2l}.$$

Comme $l > 0$, on obtient alors $l = \frac{n(p-1)}{2} < \frac{n(2^*-2)}{2} = \frac{2n}{n-2} = 2^*$, ce qui est absurde car $l \geq 2^*$. Donc $(q_i)_i$ stationne en l'infini, et donc $u \in L^\infty(\Omega)$.

2.4.2. *Etape 2* : Montrons qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $u \in C^{2,\theta}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

On se donne $q > \frac{pn}{2}$. On a $u \in L^q(\Omega)$ d'après l'étape précédente. Le point 3 du Théorème 15 donne donc $\theta \in]0, 1[$ tel que $u \in C^{0,\theta}(\Omega)$. On en déduit sans difficulté que $|u|^{p-1}u \in C^{0,\theta}(\Omega)$ car $p > 1$. Le Théorème 19 de régularité dans les espaces de Hölder donne alors $u \in C^{2,\theta}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

Comme démontré dans le TD1, ceci impose que $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ est une solution classique de

$$\begin{cases} -\Delta u + au = \lambda|u|^{p-1}u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

2.4.3. *Etape 3* : Stricte positivité. On a vu qu'on peut supposer que $u \geq 0$. Pour $K \geq \|a\|_\infty + 1$, on écrit

$$-\Delta u + (a + K)u = \lambda u^p + Ku \geq 0 \text{ dans } \Omega$$

avec $u \geq 0$. Sachant que $a + K > 0$, Ω connexe et $u \not\equiv 0$, il suit alors du principe du maximum de Hopf (Théorème 12 que $u > 0$).

2.4.4. *Etape 4* : Solution du problème d'origine.

On pose $v := \mu u$ avec $\mu > 0$. On constate que $-\Delta v + av = \lambda \mu^{1-p} v^p$ dans Ω , et donc, en posant $\mu := \lambda^{1/(p-1)}$, on récupère une solution du problème initial. On a donc prouvé le

THÉORÈME 20. Ω ouvert borné C^∞ de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Soit $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

Alors pour tout $1 < p < 2^* - 1$, il existe $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u + au = u^p & \text{dans } \Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

De plus, $u \in H_0^1(\Omega)$ est un minimiseur de la fonctionnelle I définie en (14).

Généralisations

- En utilisant judicieusement les théorèmes de régularité, on peut se contenter de $a \in C^{0,\theta}(\Omega)$ pour un $\theta \in]0, 1[$ donné.
- Plus difficile : avec $a \in L^t(\Omega)$, $t > n/2$, on trouve une solution faible qui est aussi dans $C^0(\overline{\Omega})$ et qui est > 0 .
- Avec $n = 1$ ou 2 : le résultat reste valable pour tout $p > 1$.

3. Méthode du Lemme du Col

3.1. Formulation variationnelle.

3.2. Le Lemme du Col (Mountain-Pass Lemma).

3.3. Résolution du problème.