

Contrôle événementiel : corrigé des travaux dirigés

romain.postoyan@univ-lorraine.fr

1ère partie

Oscillateur de van der Pol

1. Non-linéaire à cause du terme $-x_1^2 x_2$ dans l'équation décrivant la dynamique de la variable x_2 .
2. Il y a une infinité de façons de faire, en voici une :

$$u = -(1 - x_1^2)x_2 + x_1 + v \quad (1)$$

où v est un terme (linéaire) à déterminer. Ainsi le système devient

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= v \end{aligned} \quad (2)$$

qui est bien linéaire ; il s'agit d'un double intégrateur. La nouvelle entrée de commande est v .

3. Soit la fonction de Lyapunov candidate $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2) = \frac{1}{2}x^\top P x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, qui est définie positive. Cette fonction est bien C^1 , définie positive, radialement non-bornée. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et $v \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial x}(x_2, v)^\top &= (x_1 + \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2}x_1 + x_2)(x_2, v)^\top \\ &= x_1 x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 + (\frac{1}{2}x_1 + x_2)v. \end{aligned} \quad (3)$$

On pose $v = -\lambda(\frac{1}{2}x_1 + x_2)$ avec $\lambda > 0$ ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial x}(x_2, v)^\top &= x_1 x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 - \lambda(\frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2) \\ &= x^\top \begin{pmatrix} -\lambda/4 & \frac{1}{2} - \lambda/2 \\ \star & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} x \\ &=: -x^\top Q x. \end{aligned} \quad (4)$$

Pour que Q soit définie positive il faut que ses mineurs le soit, i.e., $\lambda/4$ ce qui est bien le cas et $\lambda/4(-\frac{1}{2} + \lambda) - (-\frac{1}{2} + \lambda/2)^2$, pour cela il faut que $\lambda > 4/3$. Ainsi, en prenant pour loi de commande

$$u = -(1 - x_1^2)x_2 + x_1 - \lambda(\frac{1}{2}x_1 + x_2), \quad (5)$$

avec $\lambda > 4/3$, l'origine du système est globalement exponentiellement stable.

4. (**) Entre deux instants d'échantillonnage successifs

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= (1 - x_1^2)x_2 - x_1 + \hat{u} = (1 - x_1^2)x_2 - x_1 + e + u = v + e = -\lambda(\frac{1}{2}x_1 + x_2) + e \\ \dot{e} &= -g(x, e)\end{aligned}\quad (6)$$

où $g(x, e)$ correspond à l'expression de $\dot{u}$, il n'est pas nécessaire de la spécifier.

A chaque instant d'échantillonnage

$$\begin{aligned}x_1^+ &= x_1 \\ x_2^+ &= x_2 \\ e^+ &= 0\end{aligned}\quad (7)$$

5. En reprenant les calculs précédents, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et $e \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, e) &\leq -x^\top Qx + (\frac{1}{2}x_1 + x_2)e \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q)|x|^2 + 3/2|x||e|\end{aligned}\quad (8)$$

où $f(x, e)$ est le champ de vecteurs associé aux dynamiques de x à la question précédente. Par ailleurs, $\frac{3}{2}|x||e| \leq \frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)|x|^2 + \frac{9}{8\lambda_{\min}(Q)}|e|^2$. On en déduit que la propriété désirée est satisfaite avec $a = \frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)$ et $b = 9/8\lambda_{\min}(Q)^{-1}$.

6. Il suffit de prendre $b|e|^2 \leq \sigma a|e|^2$ avec $\sigma \in (0, 1)$.

7. Reste à vérifier l'existence d'un temps minimum strictement positive uniforme entre deux instants successifs d'échantillonnage.

Généralisation

Questions.

8. Il suffit de considérer $\gamma(|e|) \leq \sigma\alpha(|x|)$ avec $\sigma \in (0, 1)$.

9. (a) Le temps inter-transmission correspond au premier temps positif pour lequel $\gamma(|e|)$ atteint $\sigma\alpha(|x|)$ en partant de 0, sa valeur après une transmission. Puisque $\gamma(|e|) \leq \ell_2|e|$ pour tout e et $\ell_3|x| \leq \alpha(|x|)$ pour tout x , ce temps ne se produira pas avant que $\ell_2|e|$ n'atteigne $\sigma\ell_3|x|$ en partant de 0. Ainsi, si on prouve que le temps qu'il faut à $\ell_2|e|$ pour atteindre $\sigma\ell_3|x|$ en partant de zéro est plus grand qu'une constante disons τ , alors τ sera un minorant du temps inter-transmission de la loi d'échantillonnage d'origine.

(b) Dans l'analyse ci-dessous on suppose que $x(t) \neq 0$ pour les t considérés. Cela peut sembler peu rigoureux mais cela se justifie analytiquement. Nous considérons $t \geq 0$

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = \frac{\frac{d}{dt}|e(t)|}{|x(t)|} = \frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dt}|e(t)||x(t)| - \frac{d}{dt}|x(t)||e(t)|}{|x(t)|^2}\quad (9)$$

Or $\frac{d}{dt}|e(t)| = \frac{d}{dt}\sqrt{e(t)^\top e(t)} = \frac{1}{2} \frac{e(t)^\top \dot{e}(t)}{|e(t)|}$. Ainsi (j'omets les dépendances au temps par la suite)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{|e|}{|x|} &= \frac{1}{|x|^2} \left(\frac{|x|}{|e|} \frac{1}{2} e^\top g(x, e) - \frac{|e|}{|x|} \frac{1}{2} x^\top f(x, e) \right) \\
 &= \frac{1}{|x||e|} \frac{1}{2} e^\top g(x, e) - \frac{|e|}{|x|^3} \frac{1}{2} x^\top f(x, e) \\
 &\leq \frac{1}{|x||e|} \frac{1}{2} \ell_1(|x| + |e|) + \frac{|e|}{|x|^3} \frac{1}{2} |x| \ell_1(|x| + |e|) \\
 &\leq \frac{\ell_1}{2} \left(\frac{1}{|x|}(|x| + |e|) + \frac{|e|}{|x|^3}(|x| + |e|) \right) \\
 &\leq \frac{\ell_1}{2} \left(1 + 2 \frac{|e|}{|x|} + \frac{|e|^2}{|x|^2} \right) \\
 &= \frac{\ell_1}{2} (1 + \phi)^2.
 \end{aligned} \tag{10}$$

(c) Le temps d'inter-transmission est plus grand que le temps qu'il faut à ψ d'être égal à $\frac{\sigma \ell_3}{\ell_2}$. Il suffit de résoudre $\psi(\tau) = \frac{\sigma \ell_3}{\ell_2}$ pour obtenir le résultat.

10. Pas en l'état car on ne peut pas borner linéairement g , par contre on peut le faire sur n'importe quel compact (incluant l'origine). En exploitant les propriétés de stabilité du système, on peut montrer qu'il existe des ensembles compacts invariants sur lesquels on peut déduire l'existence d'un temps minimum entre deux sauts strictement positif. La seule différence avec les développements ci-dessus est que ce temps dépendra du compact considéré, on parle de temps uniforme semi-globalement.

Observateur de Luenberger

1.

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + Bu + L(y - \tilde{y}) \\
 \tilde{y} &= C\tilde{x},
 \end{aligned} \tag{11}$$

où $\tilde{x}$ est l'état estimé et $\tilde{y}$ la sortie estimée.

2. Cf. figure.



3. Soient $\hat{y}$ la sortie y échantillonnée, $e := \hat{y} - y$ l'erreur induite par l'échantillonnage sur la

sortie et $\bar{x} := x - \tilde{x}$ l'erreur d'estimation. Entre deux instants d'échantillonnage successifs

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ \dot{\tilde{x}} &= Ax + Bu - (A\tilde{x} + Bu + L(\hat{y} - \tilde{y})) = Ax + Bu - (A\tilde{x} + Bu + L(y + e - \tilde{y})) = (A - LC)\tilde{x} - Le \\ \dot{e} &= -C(Ax + Bu)\end{aligned}\tag{12}$$

et à chaque instant d'échantillonnage

$$\begin{aligned}x^+ &= x \\ \tilde{x}^+ &= \tilde{x} \\ e^+ &= 0\end{aligned}\tag{13}$$

4. On serait tenter de prendre $|e| \leq \sigma|\bar{x}|$ pour une certaine constante $\sigma > 0$, mais on ne peut pas le faire d'un point de vue pratique car on n'a pas accès à x . Une alternative en revanche est de construire une loi de seuil absolu du type $|e| \leq \rho$ où $\rho > 0$ est n'importe quelle constante.