

TEST (1h) - 14 Novembre 2024

Notes de cours et de TDs autorisées - calculatrices non autorisées.

La qualité de la rédaction et la présentation de la copie seront prises en compte dans la notation !

Barème indicatif (sur 27 points) en **rouge** / BONUS : Exercice 5 .

Exercice 1 /6

Rappel :

La fonction cosinus complexe est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par

$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} .$$

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par

$$f(z) = z^2 + \bar{z} + \cos(iz) .$$

1. Déterminer les parties réelles et imaginaires de f .
2. La fonction f est-elle holomorphe sur $\mathbb{C}$? On donnera deux arguments différents.

Exercice 2 /5

Déterminer l'ensemble des fonctions holomorphes $f = P + iQ$ sur $\mathbb{C}$ vérifiant pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$P(x, y) = 2xy .$$

Indication : On rappelle que si $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = \phi(y) ,$$

avec $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une certaine fonction continue, alors Q s'écrit de la forme

$$Q(x, y) = \Phi(y) + c(x) ,$$

où Φ désigne une primitive de ϕ sur $\mathbb{R}$ et $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 .
On pourra utiliser ce fait sans explication.

Exercice 3 /6

Rappel :

Si $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b , vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$.

Les questions suivantes sont toutes indépendantes.

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$(i) \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}} , \quad (ii) \sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n , \quad (iii) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^n} z^n .$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n . Trouver le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geq 1} d(n) z^n .$$

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Montrer que le rayon de convergence des séries entières de termes généraux $\frac{\cos(n\theta)}{n!}$ et $\frac{\sin(n\theta)}{n!}$ est $R = +\infty$ et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n!} z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} z^n .$$

Indications : On pourra noter respectivement P et Q la première et la deuxième somme et calculer pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(P + iQ)(z)$ et $(P - iQ)(z)$.

Exercice 4 /5

Rappels :

- Un segment d'origine $z_0 \in \mathbb{C}$ et d'extrémité $z_1 \in \mathbb{C}$ est naturellement paramétré par

$$\gamma : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{C} \\ t & \longmapsto z_0 + t(z_1 - z_0) \end{cases}$$

- Si γ est un chemin obtenu en concaténant deux chemins γ_1 et γ_2 alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

Dans les deux cas suivants dessiner le chemin γ dans le plan complexe et calculer l'intégrale

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz :$$

1. Le segment allant de i à 0 puis de 0 à 1 .
2. Le segment allant de i à $1 + i$ puis de $1 + i$ à 1 .

Les résultats obtenus sont-ils surprenants ? Pourquoi ?

Exercice 5 (Un peu plus dur!) BONUS : /5

1. Soit $u : \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle qu'il existe une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant

$$u = \operatorname{Re}(f) .$$

Montrer alors que u est *harmonique* i.e :

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 . \quad (\star)$$

2. Vérifier que la relation $(\star)$ se réécrit

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0 .$$

3. Montrer que la fonction $u : z \mapsto \ln(|z|)$ est harmonique sur $\mathbb{C}^*$ mais qu'elle n'est la partie réelle d'aucune fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.