

TEST (1h) - 16 Novembre 2023

Notes de cours et de TDs autorisées - calculatrices non autorisées.

La qualité de la rédaction et la présentation de la copie seront prises en compte dans la notation !

Barème indicatif (sur 25 points) en **rouge** / BONUS : Exercice 5 .

Exercice 1 /5

Rappel :

La fonction sinus complexe est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par

$$\sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} .$$

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par

$$f(z) = z^2 + \sin(iz) .$$

1. Déterminer les parties réelles et imaginaires de f .
2. En déduire que f est une fonction entière i.e holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.
3. Comment aurait-on pu justifier directement le résultat de la question précédente ?

Exercice 2 /5

Rappels :

- Si U est un ouvert connexe non-vide de $\mathbb{C}$ et $v : U \subseteq \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathbb{R}$ -différentiable dont les dérivées partielles vérifient en tout point de U

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y} ,$$

alors v est constante sur U .

- Formule de dérivation d'une composée : Si $v : U \subseteq \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$ -différentiable et s'écrit de la forme $v = F \circ P$, avec $F : u \mapsto F(u)$ et $P : (x, y) \mapsto P(x, y)$ alors

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial u}(P(x, y)) \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial u}(P(x, y)) \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$$

Soit U un ouvert connexe non-vide de $\mathbb{C}$.

Déterminer l'ensemble des fonctions holomorphes $f = P + iQ$ sur U vérifiant $Q = P^2$.

Exercice 3 /6

Rappel :

Si $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b , vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$.

Les questions suivantes sont toutes indépendantes.

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$(i) \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}, \quad (ii) \sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n, \quad (iii) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^n} z^n .$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n . Trouver le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geq 1} d(n) z^n.$$

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Montrer que le rayon de convergence des séries entières de termes généraux $\frac{\cos(n\theta)}{n!}$ et $\frac{\sin(n\theta)}{n!}$ est $R = +\infty$ et calculer leur somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n!} z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} z^n.$$

Indications : On pourra noter respectivement P et Q la première et la deuxième somme et calculer pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(P + iQ)(z)$ et $(P - iQ)(z)$.

Exercice 4 /4

Rappels :

- Un segment d'origine $z_0 \in \mathbb{C}$ et d'extrémité $z_1 \in \mathbb{C}$ est naturellement paramétré par

$$\gamma : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{C} \\ t & \longmapsto z_0 + t(z_1 - z_0) \end{cases}$$

- Si γ est un chemin obtenu en concaténant deux chemins γ_1 et γ_2 alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

Dans les deux cas suivants dessiner le chemin γ dans le plan complexe et calculer l'intégrale

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz :$$

1. Le segment allant de i à 0 puis de 0 à 1.
2. Le segment allant de i à $1 + i$ puis de $1 + i$ à 1.

Exercice 5 (Plus dur!) BONUS : /5

Soit U un ouvert connexe non-vide de $\mathbb{C}$ et $f = P + iQ : U \rightarrow \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$ -différentiable.

Rappel : *Coordonnées polaires* : On rappelle que tout nombre complexe non nul $z \in \mathbb{C}^*$ se représente de manière unique sous la forme $z = re^{i\theta} = |z|e^{i \arg(z)}$, $\arg(z) \in]-\pi, \pi]$ désignant l'argument principal de z . De plus, si l'on veut exprimer par exemple P en coordonnées polaires, cela revient à considérer la fonction $\tilde{P}(r, \theta) = P(x(r, \theta), y(r, \theta)) = P(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$.

1. Démontrer que les équations de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires (r, θ) prennent la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta} = -r \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial r} \end{cases},$$

Indication : On a $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$, $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2}$ et $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2}$. De plus, par exemple, $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$ et mêmes types de formules pour les trois autres dérivées partielles...

2. En déduire que la fonction définie pour $\Re(z) > 0$ par

$$f(z) = \ln|z| + i \arg(z),$$

est holomorphe.