

Analyse complexe ISN 1A

TD 2 : Séries entières, Fonctions analytiques complexes

2025-2026

1 Séries entières

Exercice 1

Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ et } \frac{1}{(1-x)^2} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$$

Exercice 2

Montrer que l'on a

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z-1)^n \text{ sur } D(1, 1) := \{z \in \mathbb{C}^* ; |z-1| < 1\}$$

et

$$\frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)(z+1)^n \text{ sur } D(-1, 1) := \{z \in \mathbb{C}^* ; |z+1| < 1\}$$

Exercice 3

Donner les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} (\ln(n))^2 z^n, \sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n, \sum_{n \geq 0} n^2 z^n, \sum_{n \geq 1} \frac{(n!)}{n^n} z^n, \sum_{n \geq 1} \frac{(1+i)^n}{n 2^n} z^{3n}, \sum_{n \geq 0} z^{n!}, \sum_{n \geq 0} n^{\ln(n)} z^n$$

Exercice 4 (Fonctions de Bessel)

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère la série entière

$$J_k(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+k}.$$

Quel est son rayon de convergence ? Montrer que sur son disque de convergence, J_k est solution de l'équation différentielle

$$z^2 y'' + zy' + (z^2 - k^2)y = 0.$$

2 Fonctions analytiques complexes

Exercice 5

Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = e \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}.$$

Exercice 6 (Détermination du log complexe)

Montrer qu'il n'existe pas de détermination (continue) du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.

Exercice 7 (Détermination analytique du log complexe)

Démontrer que la fonction

$$f : z \mapsto \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$$

définit une détermination du logarithme sur le disque ouvert $D(1, 1)$.

Exercice 8 (Analyticité des séries entières)

Soit $f : z \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $z_0 \in D(0, R)$. Montrer que la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} z^n$$

admet un rayon de convergence au moins égal à $R - |z_0|$.

Montrer alors que pour tout $z \in D(z_0, R - |z_0|)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

2.1 Principe du prolongement analytique

Exercice 9

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ et $f \in \mathcal{A}(U)$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $f^{(n)}(z_0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
- (ii) f est identiquement nulle sur un voisinage de z_0 .
- (iii) f est identiquement nulle sur U .

Exercice 10 (Intégrité de l'anneau $\mathcal{A}(U)$)

Montrer que si U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, l'anneau $\mathcal{A}(U)$ des fonctions analytiques sur U est intègre i.e si $f, g \in \mathcal{A}(U)$ vérifient $fg = 0$ alors $f = 0$ ou $g = 0$.

2.2 Zéros d'une fonction analytique

Exercice 11 (Principe des zéros isolés)

Montrer le principe des zéros isolés pour les fonctions analytiques complexes.

Exercice 12

Montrer que $f : z \mapsto \sin(\frac{\pi}{1-z})$ est définie et analytique sur $D(0, 1)$. Quels sont les zéros de f sur ce disque ? Est-ce en contradiction avec le principe des zéros isolés ?

Exercice 13

Existe-t-il une fonction f analytique définie sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$ contenant 0 vérifiant

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} ?$$