

CORRIGÉ DE L'EXAMEN: MÉTHODES VARIATIONNELLES POUR LES EDP ELLIPTIQUES

- Documents écrits à la main et feuilles de TD sont autorisés.
- En dehors des feuilles de TD, les documents imprimés sont interdits.
- Ordinateurs, téléphones ou autres appareil électroniques interdits.
- Vous pouvez admettre une ou plusieurs questions du problème pour traiter les suivantes.

Soit Ω un ouvert borné régulier connexe de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, et soit $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. On se donne $0 < \theta < 2$. On suppose que $0 \in \Omega$. Le but de ce problème est de montrer le théorème suivant :

Théorème 1. *En plus des hypothèses ci-dessus, on suppose que $-\Delta + \frac{a(x)}{|x|^\theta}$ est coercif (définition plus bas), que $n > 4 - \theta$ et que $a(0) < 0$. Alors il existe une solution faible (définition plus bas) $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \not\equiv 0$, de*

$$\begin{cases} -\Delta u + \frac{a(x)}{|x|^\theta} u = u^{2^*-1} & \text{dans } \Omega \\ u \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (E_a)$$

où $2^* := \frac{2n}{n-2}$.

On va commencer par étudier un cas plus général. On se donne $h \in L^p(\Omega)$ avec $p > n/2$, et on considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + hu = u^{2^*-1} & \text{dans } \Omega \\ u \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (E)$$

1. NOTION DE SOLUTION FAIBLE

1. En utilisant l'inégalité de Hölder ($\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ pour tous $f \in L^r$, $g \in L^s$, $r, s \geq 1$ et $1/r + 1/s = 1$), montrez qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\left| \int_{\Omega} hu^2 dx \right| \leq C \|u\|_{2^*}^2 \text{ pour tout } u \in L^{2^*}(\Omega).$$

Solution : Soit $s > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{s} = 1$. Sachant que $\infty > p > n/2$, on a $1 < s < \frac{n}{n-2}$. Pour $u \in L^{2^*}(\Omega)$, l'inégalité de Hölder donne

$$\left| \int_{\Omega} hu^2 dx \right| \leq \|h\|_p \|u^2\|_s = \|h\|_p \|u\|_{2s}^2.$$

Or $2s \leq 2^*$ (et même $<$) et Ω borné, donc il existe $C(\Omega, s) > 0$ tel que $\|u\|_{2s} \leq C(\Omega, s) \|u\|_{2^*}$ et donc

$$\left| \int_{\Omega} hu^2 dx \right| \leq \|h\|_p C(\Omega, s)^2 \|u\|_{2^*}^2,$$

ce qui prouve le résultat annoncé.

2. Dédisez-en que pour tous $u, \varphi \in L^{2^*}(\Omega)$, $hu\varphi \in L^1(\Omega)$.

Solution : C'est du Cauchy-Schwarz. On écrit $|hu\varphi| = \sqrt{|h|}u \cdot \sqrt{|h|}\varphi$. Comme $|h| \in L^p$, il suit de la question précédente que $\sqrt{|h|}u \in L^2$ et $\sqrt{|h|}\varphi \in L^2$, et donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |hu\varphi| dx &\leq \|\sqrt{|h|}u\|_2 \|\sqrt{|h|}\varphi\|_2 = \sqrt{\int_{\Omega} |h|u^2 dx} \times \sqrt{\int_{\Omega} |h|\varphi^2 dx} \\ &\leq C\|u\|_{2^*} \|\varphi\|_{2^*}. \end{aligned}$$

Et donc $hu\varphi \in L^1(\Omega)$.

Alternative : tant dans cette question que dans la précédente, on aurait pu utiliser la mesure $|h| dx$ en lieu et place de dx . Une réécriture de la question précédente est $L^{2^*}(\Omega, dx) \subset L^2(\Omega, |h|dx)$, l'injection étant continue.

Pour $f \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$, on dit que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta u + hu = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (L)$$

si

$$\int_{\Omega} ((\nabla u, \nabla \varphi) + hu\varphi) dx = \int_{\Omega} f\varphi dx \text{ pour tout } \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad (L)_w$$

3. Montrez que pour tous $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$, le membre de gauche et le membre de droite de $(L)_w$ sont bien défini. La définition d'une solution faible fait donc sens.

Solution : Pour $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$, on a $|\nabla u|, |\nabla \varphi| \in L^2$, donc $\int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \varphi) dx$ fait sens par Cauchy-Schwarz. Il suit du plongement de Sobolev $H_0^1 \hookrightarrow L^{2^*}$ que $u, \varphi \in L^{2^*}(\Omega)$, puis $\int_{\Omega} hu\varphi dx$ fait sens par la question précédente. Enfin, comme $f \in L^{\frac{2n}{n+2}}$, $\varphi \in L^{2^*}$ et $\frac{n+2}{2n} + \frac{1}{2^*} = 1$, le membre de droite fait sens par Hölder.

2. LE PROBLÈME LINÉAIRE

On suppose que $-\Delta + h$ est coercif, c'est-à-dire qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + hv^2) dx \geq c\|v\|_{H^1}^2 \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega) \quad (C)$$

où $\|v\|_{H^1}^2 = \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2) dx$. On se donne $f \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$.

4. Montrez qu'il existe une unique solution faible de (L) .

Solution : On va utiliser le théorème de Lax-Milgram. On introduit la forme bilinéaire

$$B(u, v) := \int_{\Omega} ((\nabla u, \nabla \varphi) + hu\varphi) dx \text{ pour } u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Il suit des questions précédentes que cette forme est bien définie et bilinéaire. De plus, pour $u, v \in H_0^1$, on a

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &\leq \int_{\Omega} |\nabla u| \cdot |\nabla v| dx + \int_{\Omega} huv dx \leq \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + C\|u\|_{2^*} \|\varphi\|_{2^*} \\ &\leq \|u\|_{H^1} \|u\|_{H^1} + C \times C_S^2 \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \end{aligned}$$

où $C_S > 0$ est telle que $\|w\|_{2^*} \leq C_S \|w\|_{H^1}$ pour tout $w \in H_0^1$. Ceci montre la continuité de B . La coercivité est donnée par hypothèse.

On pose $T(v) := \int_{\Omega} fv dx$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. On a déjà remarqué que ceci est bien défini. L'inégalité de Hölder et l'inégalité de Sobolev donnent

$$|T(v)| = \left| \int_{\Omega} fv dx \right| \leq \|f\|_{2n} \|v\|_{\frac{2n}{n-2}} \leq C_S \|f\|_{2n} \|v\|_{H^1}$$

pour tout $v \in H_0^1$. Donc $T : H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire continue.

Comme H_0^1 muni de son produit scalaire est un Hilbert, il suit du théorème de Lax-Milgram qu'il existe une unique fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $B(u, v) = T(v)$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, ce qui revient à dire que u est solution faible de $(L)_w$.

3. MINIMISATION GÉNÉRALE

On suppose toujours que $-\Delta + h$ est coercif,

On se donne maintenant un réel q tel que $1 < q \leq 2^* - 1$. Pour $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \neq 0$, on définit

$$I_q(v) := \frac{\int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + hv^2) dx}{\left(\int_{\Omega} |v|^{q+1} dx\right)^{\frac{2}{q+1}}}$$

5. Montrez que pour tout $v \in H_0^1(\Omega) - \{0\}$, la quantité $I_q(v)$ est bien définie et que

$$m := \inf\{I_q(v) / v \in H_0^1(\Omega) - \{0\}\}$$

est définie et $m > 0$.

Solution : Il suit des plongements de Sobolev que pour $q \leq 2^* - 1$, comme Ω est borné, il existe $C_q(\Omega) > 0$ tel que

$$(1) \quad \|v\|_{q+1} \leq C_q(\Omega) \|v\|_{H^1} \text{ pour tout } v \in H_0^1.$$

Avec la coercivité, on obtient donc

$$I(v) \geq \frac{c \|v\|_{H^1}^2}{C_q(\Omega)^2 \|v\|_{H^1}^2} = \frac{c}{C_q(\Omega)^2} > 0$$

pour tout $v \in H_0^1$, $v \neq 0$. Comme $H_0^1 - \{0\}$ est non vide, l'infimum m est défini et $m \geq \frac{c}{C_q(\Omega)^2} > 0$.

6. Montrez qu'il existe une suite minimisante $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $u_i \in H_0^1(\Omega) - \{0\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\int_{\Omega} |u_i|^{q+1} dx = 1 \text{ pour tout } i \in \mathbb{N} \text{ et } \lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (|\nabla u_i|^2 + hu_i^2) dx = m.$$

Solution : On en déduit donc l'existence d'une suite $(\hat{u}_i)_i$ telle que $\hat{u}_i \in H_0^1(\Omega) - \{0\}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $\lim_{i \rightarrow +\infty} I(\hat{u}_i) = m$. En posant $u_i := \frac{\hat{u}_i}{\|\hat{u}_i\|_{q+1}}$, on obtient

$$u_i \in H_0^1(\Omega), \|u_i\|_{q+1} = 1 \text{ et } \lim_{i \rightarrow +\infty} I(u_i) = m.$$

7. Montrez qu'il existe une sous-suite $(u_{j(i)})_i$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ tels que

$$\begin{cases} u_{j(i)} \rightharpoonup u & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega) \text{ lorsque } i \rightarrow +\infty \\ u_{j(i)} \rightarrow u & \text{fortement dans } L^s(\Omega) \text{ lorsque } i \rightarrow +\infty \text{ et } 1 \leq s < 2^* \\ u_{j(i)}(x) \rightarrow u(x) & \text{pp } x \in \Omega \text{ lorsque } i \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Solution : Montrons d'abord que la suite (u_i) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. En effet, il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $I(u_i) \leq m + 1$ pour tout $i \geq i_0$. Il suit de la coercivité que $\|u_i\|_{H^1}^2 \leq c^{-1}(m + 1)$ pour tout $i \geq i_0$, ce qui prouve le résultat. Il suit alors du Théorème d'extraction (compacité faible de la boule fermée et Relich-Kondrakov) qu'il existe une sous-suite $(u_{j(i)})_i$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ tels que

$$u_{j(i)} \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega)$$

$$u_{j(i)} \rightarrow u \text{ fortement dans } L^s(\Omega) \text{ pour tout } 1 \leq s < 2^*$$

La convergence étant forte dans L^1 , quitte à extraire de nouveau, on peut supposer que la convergence a lieu pp $x \in \Omega$.

On pose $\theta_i := u_{j(i)} - u$

8. Montrez que

$$(2) \quad I_q(u_{j(i)}) = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + hu^2) \, dx + \int_{\Omega} |\nabla \theta_i|^2 \, dx + o(1) \text{ quand } i \rightarrow +\infty.$$

Solution : En développant, on a

$$\begin{aligned} I_q(u_{j(i)}) &= \int_{\Omega} (|\nabla u_{j(i)}|^2 + hu_{j(i)}^2) \, dx = \int_{\Omega} (|\nabla(u + \theta_i)|^2 + h(u + \theta_i)^2) \, dx \\ &= \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + hu^2) \, dx + 2 \int_{\Omega} ((\nabla u, \nabla \theta_i) + hu\theta_i) \, dx + \int_{\Omega} (|\nabla \theta_i|^2 + h\theta_i^2) \, dx \end{aligned}$$

On va réduire cette expression grâce à la convergence faible. On pose

$$\begin{aligned} T : H_0^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \int_{\Omega} ((\nabla u, \nabla \varphi) + hu\varphi) \, dx \end{aligned}$$

En remarquant que $T(\varphi) = B(u, \varphi)$, en utilisant les inégalités obtenues dans la question 4, la fonction T est trivialement linéaire et pour $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$|T(\varphi)| \leq C \|u\|_{H^1} \|\varphi\|_{H^1}.$$

Ainsi T est linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$. Comme on a convergence faible $\theta_i \rightharpoonup 0$ dans $H_0^1(\Omega)$, on obtient $\lim_{i \rightarrow +\infty} T(\theta_i) = 0$. On récupère ainsi

$$(3) \quad I(u_{j(i)}) = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + hu^2) \, dx + \int_{\Omega} (|\nabla \theta_i|^2 + h\theta_i^2) \, dx + o(1).$$

D'après la question 1, il existe $1 < s < \frac{n}{n-2}$ tel que

$$\left| \int_{\Omega} h\theta_i^2 \, dx \right| \leq \|h\|_p \|\theta_i\|_{2s}^2.$$

Or $2s < 2^*$, donc $\theta_i \rightarrow 0$ fortement dans L^{2s} , puis $\int_{\Omega} h\theta_i^2 \, dx \rightarrow 0$ lorsque $i \rightarrow +\infty$. On obtient alors le résultat attendu.

4. LE CAS SOUS-CRITIQUE $q < 2^* - 1$

Dans toute cette section, on suppose que $q < 2^* - 1$.

9. Montrez que $\int_{\Omega} |u|^{q+1} \, dx = 1$.

Solution : Comme $q + 1 < 2^*$, on a $u_{j(i)} \rightarrow u$ fortement dans L^{q+1} , puis $1 = \|u_{j(i)}\|_{q+1} \rightarrow \|u\|_{q+1}$, ce qui donne le résultat.

10. Montrez que $u \in H_0^1(\Omega) - \{0\}$ est un minimiseur de I_q .

Solution : Sachant que $\|u\|_{q+1} = 1$, on a $u \not\equiv 0$ et $I(u) = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + hu^2) \, dx$. On obtient donc

$$m + o(1) = I_q(u_{j(i)}) = I(u) + \int_{\Omega} |\nabla \theta_i|^2 \, dx + o(1) \geq I(u) + o(1).$$

Ainsi, $I(u) \leq m$. Or par définition de l'infimum, $I(u) \geq m$. Donc $I(u) = m$ et donc l'infimum est atteint en $u \in H_0^1(\Omega) - \{0\}$.

5. LE CAS CRITIQUE $q = 2^* - 1$.

11. En utilisant le Lemme de Brezis-Lieb, et une inégalité, montrez que

$$1 \leq \left(\int_{\Omega} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} + \left(\int_{\Omega} |\theta_i|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} + o(1)$$

Solution : On a déjà $u_{j(i)}(x) \rightarrow u(x)$ pp. Pour appliquer le Lemme, montrons que la convergence a lieu faiblement dans L^{2^*} .

Cela vient du plongement continu $H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}$. Soit $T : L^{2^*} \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire continue. Donc Il existe $C > 0$ tel que $|T(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{2^*}$ pour tout $\varphi \in L^{2^*}$. Donc, pour $\varphi \in H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}$, on a $|T(\varphi)| \leq C \cdot C_S \|\varphi\|_{H^1}$ pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Sachant que $u_{j(i)} \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$ faiblement, alors $T(u_{j(i)}) \rightarrow T(u)$. Donc $u_{j(i)} \rightharpoonup u$ dans L^{2^*} faiblement.

Il suit donc du Lemme de Brezis-Lieb que

$$1 = \int_{\Omega} |u_{j(i)}|^{2^*} dx = \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx + \int_{\Omega} |\theta_i|^{2^*} dx + o(1).$$

Comme $\frac{2}{2^*} < 1$, on a $(a+b)^{\frac{2}{2^*}} \leq |a|^{\frac{2}{2^*}} + |b|^{\frac{2}{2^*}}$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, et donc

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\int_{\Omega} |u|^{2^*} dx + o(1) + \int_{\Omega} |\theta_i|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \left(\int_{\Omega} |u|^{2^*} dx + o(1) \right)^{\frac{2}{2^*}} + \left(\int_{\Omega} |\theta_i|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \\ &\leq \|u\|_{2^*}^2 + \|\theta_i\|_{2^*}^2 + o(1) \end{aligned}$$

On admet qu'il existe $K(n) > 0$ ne dépendant que de $n \geq 3$ tel que

$$\frac{1}{K(n)} := \inf_{w \in H_0^1(\Omega) - \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |w|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}}$$

On suppose dans la suite de cette partie que

$$m < \frac{1}{K(n)}.$$

12. En reprenant la méthode vue en cours et en TD, montrez que $\lim_{i \rightarrow +\infty} \|\nabla \theta_i\|_2 = 0$ puis que $\int_{\Omega} |u|^{2^*} dx = 1$ et que $u \in H_0^1(\Omega) - \{0\}$ est un minimiseur de I_{2^*-1} .

Solution : En reprenant (2), on a

$$(4) \quad m + o(1) = I_{2^*-1}(u) \|u\|_{2^*}^2 + \int_{\Omega} |\nabla \theta_i|^2 dx + o(1) \geq m \|u\|_{2^*}^2 + \int_{\Omega} |\nabla \theta_i|^2 dx + o(1)$$

$$(5) \quad \geq m (1 - \|\theta_i\|_{2^*}^2) + \int_{\Omega} |\nabla \theta_i|^2 dx + o(1)$$

En utilisant l'inégalité de Sobolev (1), on obtient alors

$$m \|\theta_i\|_{2^*}^2 \geq K(n)^{-1} \|\theta_i\|_{2^*}^2,$$

puis

$$\left(\frac{1}{K(n)} - m \right) \|\theta_i\|_{2^*}^2 \leq o(1).$$

Avec $m < \frac{1}{K(n)}$, on obtient alors $\|\theta_i\|_{2^*}^2 = o(1)$. Il suit donc de (5) que $\|u\|_{2^*} = 1$. En réinjectant cette identité dans (2) et en raisonnant comme en sous-critique, on obtient le résultat.

13. Montrez qu'on peut supposer que $u \geq 0$.

Solution : Comme $u \in H_0^1(\Omega)$, on a $|u| \in H_0^1(\Omega)$ et $|\nabla |u|| = |\nabla u|$ pp $x \in \Omega$. On obtient ainsi $I_{2^*-1}(|u|) = I_{2^*-1}(u) = m$ et donc u est aussi un minimiseur.

6. LE CAS PARTICULIER $h(x) = \frac{a(x)}{|x|^\theta}$

On suppose ici qu'il existe $a \in C^0(\overline{\Omega})$ et $0 < \theta < 2$ tels que $h(x) = \frac{a(x)}{|x|^\theta}$ pour tout $x \in \Omega$.

14. Montrez qu'il existe $p > n/2$ tel que $h \in L^p(\Omega)$.

Solution : Comme $0 < \theta < 2$, on a $\frac{n}{2} < \frac{n}{\theta}$ et on se donne $p > 1$ tel que $\frac{n}{2} < p < \frac{n}{\theta}$. Comme $p\theta < n$, on a $|x|^{-\theta} \in L^p(B(0, R))$ pour tout $R > 0$. Comme Ω est borné, on a donc $|x|^{-\theta} \in L^p(\Omega)$ et le résultat suit.

On pose $U(x) := \left(\frac{1}{1+|x|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}$. On admet que $|\nabla U| \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $U \in L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$ et que

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |U|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}}} = \frac{1}{K(n)}.$$

On se donne $\delta > 0$ tel que $B(0, 2\delta) \subset \Omega$ et $\eta \in C^\infty(\Omega)$ telle que $\eta(x) = 1$ pour $x \in B(0, \delta)$ et $\eta(x) = 0$ pour $x \in \Omega \setminus B(0, 2\delta)$. On définit

$$u_\epsilon(x) := \eta(x) \left(\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + |x|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

15. En vous inspirant des calculs faits en cours, montrez que pour $n > 4 - \theta$, on a

$$\int_{\Omega} \frac{a(x)}{|x|^\theta} u_\epsilon^2 dx = a(0)\epsilon^{2-\theta} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{U^2}{|x|^\theta} dx + o(\epsilon^{2-\theta}) \text{ lorsque } \epsilon \rightarrow 0.$$

Solution : On rappelle que $\delta > 0$ a été défini plus haut. On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{a(x)}{|x|^\theta} u_\epsilon^2 dx &= \int_{B(0, \delta)} \frac{a(x)}{|x|^\theta} u_\epsilon^2 dx + \int_{\Omega \setminus B(0, \delta)} \frac{a(x)}{|x|^\theta} u_\epsilon^2 dx \\ &= \int_{B(0, \epsilon^{-1}\delta)} \frac{a(\epsilon y)}{|\epsilon y|^\theta} u_\epsilon(\epsilon y)^2 \epsilon^n dy + O(\epsilon^{n-2}) \\ &= \int_{B(0, \epsilon^{-1}\delta)} \frac{a(\epsilon y)}{|\epsilon y|^\theta} u_\epsilon(\epsilon y)^2 \epsilon^n dy + O(\epsilon^{n-2}) \\ &= \epsilon^{2-\theta} \int_{B(0, \epsilon^{-1}\delta)} \frac{a(\epsilon y)}{|y|^\theta} \left(\frac{1}{1+|y|^2}\right)^{2 \cdot \frac{n-2}{2}} dy + O(\epsilon^{n-2}) \end{aligned}$$

Comme a est bornée sur $\mathbb{R}^n$ et $y \mapsto \frac{1}{|y|^\theta} \left(\frac{1}{1+|y|^2}\right)^{n-2} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour $n > 4\theta$ (en 0, c'est $\simeq |y|^{-\theta}$ intégrable en 0 car $\theta < 2 < n$; en l'infini c'est $\simeq |y|^{2n+\theta-4}$ intégrable car $2n+\theta-4 > n$), il suit du théorème de convergence dominée que

$$\int_{\Omega} \frac{a(x)}{|x|^\theta} u_\epsilon^2 dx = \epsilon^{2-\theta} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{a(0)}{|y|^\theta} U^2 dy + O(\epsilon^{n-2}).$$

Le résultat suit car $n-2 > 2-\theta$.

On rappelle qu'on a vu en cours que pour $n \geq 3$, on a

$$\int_{\Omega} |\nabla u_\epsilon|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^2 dx + O(\epsilon^{n-2})$$

$$\text{et } \int_{\Omega} |u_\epsilon|^{2^*} dx = \int_{\mathbb{R}^n} |U|^{2^*} dx + O(\epsilon^{n-2}).$$

16. Montrez que pour $n > 4 - \theta$, il existe une constante $\alpha_n > 0$ telle que

$$(6) \quad I_{2^*-1}(u_\epsilon) = \frac{1}{K(n)} - a(0)\alpha_n \epsilon^{2-\theta} + o(\epsilon^{2-\theta}).$$

Solution : On a

$$\begin{aligned}
I_{2^*-1}(u_\epsilon) &= \frac{\int_{\Omega} (|\nabla|^2 + \frac{a(x)}{|x|^\theta} u_\epsilon^2) dx}{(\int_{\Omega} |u_\epsilon|^{2^*} dx)^{\frac{2}{2^*}}} \\
&= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^2 dx + a(0)\epsilon^{2-\theta} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{U^2}{|x|^\theta} dx + o(\epsilon^{2-\theta})}{(\int_{\mathbb{R}^n} |U|^{2^*} dx + o(\epsilon^{2-\theta}))^{\frac{2}{2^*}}} \\
&= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^2 dx + a(0)\epsilon^{2-\theta} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{U^2}{|x|^\theta} dx}{(\int_{\mathbb{R}^n} |U|^{2^*} dx)^{\frac{2}{2^*}}} + o(\epsilon^{2-\theta}) \\
&= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^2 dx}{(\int_{\mathbb{R}^n} |U|^{2^*} dx)^{\frac{2}{2^*}}} + a(0) \frac{\epsilon^{2-\theta} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{U^2}{|x|^\theta} dx}{(\int_{\mathbb{R}^n} |U|^{2^*} dx)^{\frac{2}{2^*}}} + o(\epsilon^{2-\theta}) \\
&= \frac{1}{K(n)} + \alpha_n a(0) \epsilon^{2-\theta} + o(\epsilon^{2-\theta})
\end{aligned}$$

avec $\alpha_n := \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{U^2}{|x|^\theta} dx}{(\int_{\mathbb{R}^n} |U|^{2^*} dx)^{\frac{2}{2^*}}}$

17. On admet qu'un minimiseur positif de I_{2^*-1} est solution faible de (E_a) à **multiplication par une constante près**. Montrez le théorème.

Solution : Supposons que $a(0) < 0$. On a alors $\alpha_n a(0) + o(1) < 0$ pour $\epsilon \rightarrow 0$, puis $\alpha_n a(0) \epsilon^{2-\theta} + o(\epsilon^{2-\theta})$ pour $\epsilon \rightarrow 0$. Il suit alors du développement (6) que $I_{2^*-1}(u_\epsilon) < \frac{1}{K(n)}$ pour $\epsilon \rightarrow 0$. Et comme $m \leq I_{2^*-1}(u_\epsilon)$, on obtient $m < \frac{1}{K(n)}$. Il suit alors de la question 12 que I_{2^*-1} admet un minimiseur, mettons $u \in H_0^1(\Omega) - \{0\}$. D'après la question 13, quitte à remplacer u par $|u|$, on peut supposer que ce minimiseur est positif. C'est donc une solution faible de (E_a) .

7. RETOUR SUR LES SOLUTIONS FAIBLES (À NE FAIRE QUE SI VOUS AVEZ DÉMONTRÉ LE THÉORÈME)

On rappelle que $h \in L^p(\Omega)$ avec $p > n/2$. On se donne $f \in L^\infty(\Omega)$. En utilisant les théorèmes de régularité, montrez que si $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible positive du problème sous-critique

$$\begin{cases} -\Delta u + hu = f & \text{dans } \Omega \\ u \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

alors $u \in L^r(\Omega)$ pour tout $r \geq 1$. Déduisez-en que $u \in C^0(\overline{\Omega})$.

Solution : Posons $s := \sup\{r \geq 1 \text{ t.q. } u \in L^r(\Omega)\}$. Comme $u \in H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}$, $2^* \leq s \leq \infty$ est bien défini. Supposons par l'absurde que $s < \infty$. Soit $\epsilon > 0$ tel que $s - \epsilon > 2$. Il existe donc $r \in]s - \epsilon, s[$ tel que $u \in L^r$. Comme Ω est borné, il suit de l'inégalité de Hölder que $u \in L^{s-\epsilon}$. Comme $h \in L^p$, il suit de l'inégalité de Hölder que

$$hu \in L^t(\Omega) \text{ avec } \frac{1}{t} = \frac{1}{p} + \frac{1}{s-\epsilon}.$$

Remarquons que

$$\frac{1}{t} - \frac{n+2}{2n} = \frac{1}{p} - \frac{n+2}{2n} + \frac{1}{s-\epsilon} = \frac{1}{p} - \frac{n+2}{2n} + \frac{1}{s} + o(1) \leq \frac{1}{p} - \frac{n+2}{2n} + \frac{n-2}{2n} + o(1) = \frac{1}{p} - \frac{2}{n} + o(1)$$

Comme $p > n/2$, pour $\epsilon > 0$ assez petit, on récupère $t > \frac{2n}{n+2}$, ce qui est indispensable pour utiliser le théorème de régularité.

On a donc $-\Delta u = f - hu \in L^t(\Omega)$ au sens faible avec $u \in H_0^1(\Omega)$ et $t > \frac{2n}{n+2}$. Il suit des théorèmes de régularité que $u \in W^{2,t}(\Omega)$. Si $\frac{1}{t} - \frac{2}{n} \leq 0$, il suit des plongements de Sobolev que $u \in L^r$ pour tout $r \geq 1$, en particulier $u \in L^{s+1}$, ce qui contredit la définition de s . Donc $\frac{1}{t} - \frac{2}{n} > 0$ et $u \in L^q$ avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{t} - \frac{2}{n}$. Or

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{s} = \frac{1}{t} - \frac{2}{n} - \frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{s-\epsilon} - \frac{2}{n} - \frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n} + o(1) < 0$$

lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, donc $q > s$ et $u \in L^q$. Ceci contredit encore la définition de s .

On en déduit que $s = +\infty$. Fixons $r \geq 1$: par définition de s , il existe $r' > r$ tel que $u \in L^{r'}$, puis $u \in L^r$ car Ω est borné.

Revenons à la régularité. Soit $q > 1$ tel que $\frac{n}{2} < q < p$. Montrons que $hu \in L^q$. En effet, soit $r > 0$ tel que $\frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$: en prenant q proche de p , on récupère $r > 1$. Comme $h \in L^p$ et $u \in L^r$, l'inégalité de Hölder donne $hu \in L^q$.

On a ainsi $-\Delta u = f - hu \in L^q$ pour tout $\frac{n}{2} < q < p$. Notons que $q > \frac{n}{2} > \frac{2n}{n+2}$. Il suit alors du Théorème de régularité que $u \in W^{2,q}$. Or, comme $q > \frac{n}{2}$, il suit des plongements de Sobolev qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $u \in C^{0,\alpha}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$