

EXAMEN: MÉTHODES VARIATIONNELLES POUR LES EDP ELLIPTIQUES

- Documents écrits à la main et feuilles de TD sont autorisés.
- En dehors des feuilles de TD, les documents imprimés sont interdits.
- Ordinateurs, téléphones ou autres appareil électroniques interdits.
- Vous pouvez admettre une ou plusieurs questions du problème pour traiter les suivantes.

Soit Ω un ouvert borné régulier connexe de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, et soit $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. On se donne $0 < \theta < 2$. On suppose que $0 \in \Omega$. Le but de ce problème est de montrer le théorème suivant :

Théorème 1. *En plus des hypothèses ci-dessus, on suppose que $-\Delta + \frac{a(x)}{|x|^\theta}$ est coercif (définition plus bas), que $n > 4 - \theta$ et que $a(0) < 0$. Alors il existe une solution faible (définition plus bas) $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \not\equiv 0$, de*

$$\begin{cases} -\Delta u + \frac{a(x)}{|x|^\theta} u = u^{2^*-1} & \text{dans } \Omega \\ u \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (E_a)$$

où $2^* := \frac{2n}{n-2}$.

On va commencer par étudier un cas plus général. On se donne $h \in L^p(\Omega)$ avec $p > n/2$, et on considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + hu = u^{2^*-1} & \text{dans } \Omega \\ u \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (E)$$

1. NOTION DE SOLUTION FAIBLE

1. En utilisant l'inégalité de Hölder ($\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ pour tous $f \in L^r$, $g \in L^s$, $r, s \geq 1$ et $1/r + 1/s = 1$), montrez que pour tout $u \in L^{2^*}(\Omega)$, il existe $C > 0$ tel que

$$\left| \int_{\Omega} hu^2 dx \right| \leq C \|u\|_{2^*}^2 \text{ pour tout } u \in L^{2^*}(\Omega).$$

2. Déduisez-en que pour tous $u, \varphi \in L^{2^*}(\Omega)$, $hu\varphi \in L^1(\Omega)$.

Pour $f \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$, on dit que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta u + hu = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (L)$$

si

$$\int_{\Omega} ((\nabla u, \nabla \varphi) + hu\varphi) dx = \int_{\Omega} f\varphi dx \text{ pour tout } \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad (L)_w$$

3. Montrez que pour tous $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$, le membre de gauche et le membre de droite de $(L)_w$ sont bien défini. La définition d'une solution faible fait donc sens.

2. LE PROBLÈME LINÉAIRE

On suppose que $-\Delta + h$ est coercif, c'est-à-dire qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + hv^2) dx \geq c\|v\|_{H^1}^2 \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega) \quad (C)$$

où $\|v\|_{H^1}^2 = \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2) dx$. On se donne $f \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$.

4. Montrez qu'il existe une unique solution faible de (L).

3. MINIMISATION GÉNÉRALE

On suppose toujours que $-\Delta + h$ est coercif,

On se donne maintenant un réel q tel que $1 < q \leq 2^* - 1$. Pour $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \neq 0$, on définit

$$I_q(v) := \frac{\int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + hv^2) dx}{\left(\int_{\Omega} |v|^{q+1} dx\right)^{\frac{2}{q+1}}}$$

5. Montrez que pour tout $v \in H_0^1(\Omega) - \{0\}$, la quantité $I_q(v)$ est bien définie et que

$$m := \inf\{I_q(v) / v \in H_0^1(\Omega) - \{0\}\}$$

est définie et $m > 0$.

6. Montrez qu'il existe une suite minimisante $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $u_i \in H_0^1(\Omega) - \{0\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\int_{\Omega} |u_i|^{q+1} dx = 1 \text{ pour tout } i \in \mathbb{N} \text{ et } \lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (|\nabla u_i|^2 + hu_i^2) dx = m.$$

7. Montrez qu'il existe une sous-suite $(u_{j(i)})_i$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ tels que

$$\begin{cases} u_{j(i)} \rightharpoonup u & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega) \text{ lorsque } i \rightarrow +\infty \\ u_{j(i)} \rightarrow u & \text{fortement dans } L^s(\Omega) \text{ lorsque } i \rightarrow +\infty \text{ et } 1 \leq s < 2^* \\ u_{j(i)}(x) \rightarrow u(x) & \text{pp } x \in \Omega \text{ lorsque } i \rightarrow +\infty \end{cases}$$

On pose $\theta_i := u_{j(i)} - u$

8. Montrez que

$$I_q(u_{j(i)}) = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + hu^2) dx + \int_{\Omega} |\nabla \theta_i|^2 dx + o(1) \text{ quand } i \rightarrow +\infty$$

4. LE CAS SOUS-CRITIQUE $q < 2^* - 1$

Dans toute cette section, on suppose que $q < 2^* - 1$.

9. Montrez que $\int_{\Omega} |u|^{q+1} dx = 1$.

10. Montrez que $u \in H_0^1(\Omega) - \{0\}$ est un minimiseur de I_q .

5. LE CAS CRITIQUE $q = 2^* - 1$.

11. En utilisant le Lemme de Brezis-Lieb, et une inégalité, montrez que

$$1 \leq \left(\int_{\Omega} |u|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}} + \left(\int_{\Omega} |\theta_i|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}} + o(1)$$

On admet qu'il existe $K(n) > 0$ ne dépendant que de $n \geq 3$ tel que

$$\frac{1}{K(n)} := \inf_{w \in H_0^1(\Omega) - \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |w|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}}}$$

On suppose dans la suite de cette partie que

$$m < \frac{1}{K(n)}.$$

12. En reprenant la méthode vue en cours et en TD, montrez que $\lim_{i \rightarrow +\infty} \|\nabla \theta_i\|_2 = 0$ puis que $\int_{\Omega} |u|^{2^*} dx = 1$ et que $u \in H_0^1(\Omega) - \{0\}$ est un minimiseur de I_{2^*-1} .

13. Montrez qu'on peut supposer que $u \geq 0$.

$$6. \text{ LE CAS PARTICULIER } h(x) = \frac{a(x)}{|x|^\theta}$$

On suppose ici qu'il existe $a \in C^0(\overline{\Omega})$ et $0 < \theta < 2$ tels que $h(x) = \frac{a(x)}{|x|^\theta}$ pour tout $x \in \Omega$.

14. Montrez qu'il existe $p > n/2$ tel que $h \in L^p(\Omega)$.

On pose $U(x) := \left(\frac{1}{1+|x|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}$. On admet que $|\nabla U| \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $U \in L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$ et que

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |U|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}}} = \frac{1}{K(n)}.$$

On se donne $\delta > 0$ tel que $B(0, 2\delta) \subset \Omega$ et $\eta \in C^\infty(\Omega)$ telle que $\eta(x) = 1$ pour $x \in B(0, \delta)$ et $\eta(x) = 0$ pour $x \in \Omega \setminus B(0, 2\delta)$. On définit

$$u_\epsilon(x) := \eta(x) \left(\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + |x|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

15. En vous inspirant des calculs faits en cours, montrez que pour $n > 4 - \theta$, on a

$$\int_{\Omega} \frac{a(x)}{|x|^\theta} u_\epsilon^2 dx = a(0) \epsilon^{2-\theta} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{U^2}{|x|^\theta} + o(\epsilon^{2-\theta}) \text{ lorsque } \epsilon \rightarrow 0.$$

On rappelle qu'on a vu en cours que pour $n \geq 3$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_\epsilon|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^2 dx + O(\epsilon^{n-2}) \\ \text{et } \int_{\Omega} |u_\epsilon|^{2^*} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |U|^{2^*} dx + O(\epsilon^{n-2}). \end{aligned}$$

16. Montrez que pour $n > 4 - \theta$, il existe une constante $\alpha_n > 0$ telle que

$$I_{2^*-1}(u_\epsilon) = \frac{1}{K(n)} - a(0) \alpha_n \epsilon^{2-\theta} + o(\epsilon^{2-\theta}).$$

17. On admet qu'un minimiseur positif de I_{2^*-1} est solution faible de (E_a) à homothétie près. Montrez le théorème.

7. RETOUR SUR LES SOLUTIONS FAIBLES (À NE FAIRE QUE SI VOUS AVEZ DÉMONTRÉ LE THÉORÈME)

On rappelle que $h \in L^p(\Omega)$ avec $p > n/2$. On se donne $f \in L^\infty(\Omega)$. En utilisant les théorèmes de régularité, montrez que si $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible positive du problème sous-critique

$$\begin{cases} -\Delta u + hu = f & \text{dans } \Omega \\ u \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

alors $u \in L^r(\Omega)$ pour tout $r \geq 1$. Déduisez-en que $u \in C^0(\overline{\Omega})$.