

TD: Résolution numérique d'une équation différentielle: application à la propagation de chaleur.

Objectifs:

- Utiliser le développement en série de Taylor limité à son premier terme pour résoudre numériquement des équations différentielles simples par la méthode des différences finies.
- Savoir implémenter dans un programme un schéma explicite pour résoudre une équation différentielle.

1. Introduction à l'équation de la chaleur dans le cas d'un transfert de chaleur par conduction

- Le concept de conduction de la chaleur repose sur le principe de différence de température ΔT entre deux points: la chaleur est toujours conduite des zones de haute température vers des zones de basse température. Ce concept s'exprime par la loi de Fourier:

$$\vec{q}(x, t) = -k \overrightarrow{\text{grad} T}(x, t)$$

Dans laquelle $\vec{q}$ est le flux de chaleur par unité de surface en W/m^2 au point M à un temps t, k la conductivité thermique du milieu en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ toujours positive, et $T(x, t)$ est le **champ scalaire de température au point x à un temps t**. Cette loi dit que le flux de chaleur (ou transfert de chaleur) au point x est toujours orienté vers les températures décroissantes (milieux chauds vers les milieux froids).

- La conduction de la chaleur se fait sans mouvement de matière: le transfert de chaleur se fait essentiellement par collisions atomiques, sans mouvements macroscopiques de la matière. Par exemple, lorsqu'on chauffe une casserole d'eau sur une plaque électrique, deux cas de figure se présentent:
 - soit on n'observe pas de mouvement d'eau à l'intérieur de la casserole, et dans ce cas, la chaleur est transférée de la plaque vers le volume d'eau (puis éventuellement évacuée dans l'air) uniquement par **conduction**.
 - soit on observe du mouvement dans la casserole, l'eau bouille et dans ce cas, la chaleur est transférée par **convection** dans le volume d'eau (puis dans l'air).
- Tous les matériaux ne conduisent pas la chaleur avec la même facilité, par exemple les métaux conduisent beaucoup mieux la chaleur que les matières plastiques. La grandeur caractérisant le transfert de chaleur dans un matériau est la **conductivité thermique k** intervenant dans la loi de Fourier. Dans l'équation de diffusion de la chaleur ci-dessous c'est la diffusivité thermique κ (kappa) en m^2/s et non pas la conductivité thermique qui intervient pour caractériser le transfert de chaleur. Par définition:

$$\kappa = \frac{k}{\rho C_p}$$

où ρ est la masse volumique du matériau en kg/m^3 et C_p est la quantité d'énergie par unité de masse qu'il faut fournir pour augmenter de $1^\circ C$ le milieu considéré ($J \cdot kg^{-1} \cdot s^{-1}$).

- L'équation générale de la **diffusion de la chaleur** s'écrit:

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = \kappa \Delta T(x, t)$$

Quelques commentaires sur cette équation:

a) **L'opérateur de diffusion, le laplacien Δ :** L'équation de diffusion dit qu'à un temps t donné, le champ de températures $T(x, t)$ en un point x varie ($\frac{\partial T}{\partial t} \neq 0$) si la chaleur est en train de « diffuser », i.e. si le laplacien du champ de température $\Delta T(x, t)$ n'est pas égal à 0 au point x . Un laplacien non nul signifie que la température n'est pas homogène dans l'espace et ne varie pas linéairement, ce qui veut dire qu'il existe des dérivées partielles du second ordre non nulles. L'opérateur de diffusion Δ a pour effet d'homogénéiser le champ de température, c'est à dire de réduire les différences de température dans le milieu: il diffuse la chaleur au sens propre du terme.

Exemple: Prenons un cube de cuivre de 10 cm de côté et chauffons le bloc sur une des faces avec un briquet. A la fin du chauffage, il existe une anomalie du champ de température très forte dans le voisinage du point où l'on a chauffé, i.e. les dérivées spatiales de second ordre du champ de température sont non-nulles. Suite au chauffage, l'anomalie chaude de température sur une des faces du bloc diffuse d'une part dans le volume du bloc plus froid et d'autre part diffuse du métal vers l'air environnant plus froid. Si on attend suffisamment longtemps, la chaleur continue à diffuser jusqu'à ce que le bloc de cuivre ait retrouvé une température constante.

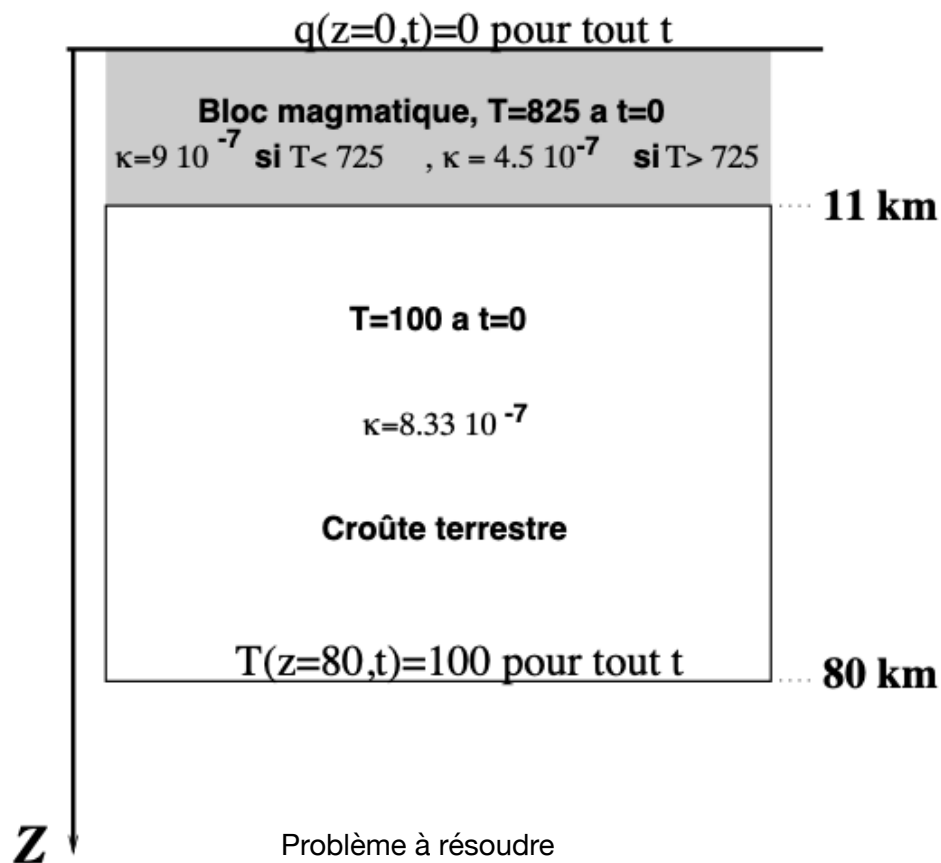
b) **La diffusivité thermique κ :** Plus la diffusivité thermique κ est grande et plus la chaleur est rapidement diffusée. Cela se remarque dans l'équation de diffusion: si on se fixe un ΔT dans le second membre, plus κ est grand, plus le terme $\kappa \Delta T$ est grand.

Exemple: La diffusivité thermique κ du cuivre est bien plus grande que la diffusivité du bois. Le cuivre est un excellent conducteur thermique.

c) **Ordre de grandeur dans l'équation de la chaleur:** Il existe beaucoup de situation en physique où plutôt que de résoudre complètement l'équation, on fait un **calcul d'ordre de grandeur**: on dit que ∂T est proportionnelle à une petite différence de température T_0 , ∂t est proportionnelle à un temps t_0 et ΔT est proportionnelle à une différence de température qui divise une distance au carré L_0^2 (car le laplacien fait intervenir des dérivées spatiales du second ordre). On peut donc réécrire l'équation de la chaleur en ordre de grandeur:

$$\frac{T_0}{t_0} / \frac{T_0}{L_0^2} \approx \kappa \Rightarrow \frac{L_0^2}{t_0} \approx \kappa$$

On se retrouve donc avec une relation liant un temps caractéristique t_0 pour notre système, une longueur caractéristique L_0 et la diffusivité thermique κ . Cette relation est fort utile pour faire des calculs de premier ordre sur le temps de propagation de la chaleur en utilisant les grandeurs caractéristiques du système.



- une anomalie de température ou un changement de température ∂T_0 mettra un temps de l'ordre de L_0^2/κ secondes pour parcourir une distance L_0 dans un milieu de diffusivité κ .
- une anomalie de température ou un changement de température ∂T_0 se propagera sur une distance $\sqrt{\kappa t_0}$.

Question 1:

Prenez toujours un bloc de cuivre de 10cm de côté et chauffez-le sur l'une des faces. La diffusivité thermique du cuivre vaut $\kappa = 1.2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$. En combien de temps l'anomalie de température atteint la face opposée du cube ?

2. Présentation du problème

- On suppose qu'à un instant donné ($t = 0\text{s}$) un bloc magmatique de granite de 11km de profondeur est exhumé à la surface terrestre. On suppose que ce bloc possède une température uniforme $T=825^\circ\text{C}$ à cet instant. Parallèlement, on suppose que la température sous ce bloc (croûte terrestre) est également uniforme $T=100^\circ\text{C}$ à l'instant $t=0\text{s}$ jusqu'à la profondeur $z=80\text{km}$. Au cours du temps, pour $t>0$, le bloc magmatique chaud va se refroidir au contact de la croûte froide dessous. Dans ce TP, on veut étudier quantitativement comment se propage la chaleur en fonction de la profondeur et en fonction du temps entre ces deux couches. Les questions que l'on se pose sont:
Comment la chaleur se propage par conduction sur ces 80km en fonction du temps? Quel est le champ de température T en fonction du temps et de la profondeur sur les 80 km?
- Le problème posé est uni-dimensionnel, l'équation générale de diffusion de la chaleur se réduit à:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

où z est la profondeur. On suppose qu'il n'y a pas de gradients horizontaux.

- Le bloc magmatique a une diffusivité thermique $\kappa = 9.10^{-7} m^2/s$ lorsque la température en son sein est inférieure à $725^\circ C$ et $\kappa = 5.5.10^{-7} m^2/s$ lorsque T est supérieure ou égale à $725^\circ C$. La diffusivité thermique de la croûte terrestre est constante quelle que soit la température et vaut $\kappa = 8.33.10^{-7} m^2/s$.
- On suppose que le flux de chaleur en surface à $z = 0 km$ est nul.

Question 2: Que signifie physiquement cette hypothèse de flux nul en surface? Dans quelle direction est conduite toute la chaleur provenant du bloc? Est-ce que cette condition est bien réaliste?

- A la profondeur $z = 80 km$, on suppose que la température est constante au cours du temps, i.e. que $T(z = 80 km, t) = 100^\circ C$, pour tous t .

3. Présentation du schéma numérique *explicite*.

- Nous introduisons un schéma numérique à l'aide de développements de Taylor d'une fonction à une variable autour d'un point, soit:

$$T(t + dt) = T(t) + \frac{\partial T}{\partial t} dt + O(dt^2)$$

Question 3: Ecrire le développement de Taylor à l'ordre 2 aux points $T(z - dz)$ et $T(z + dz)$.

Additionner $T(z - dz)$ et $T(z + dz)$ et en déduire une égalité entre $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ et une expression composée de $T(z+dz)$, $T(z-dz)$, $T(z)$, et dz . A partir de cette égalité, réutiliser l'équation générale de diffusion pour obtenir la valeur de la température au temps $t+dt$ en fonction de la température au temps t aux points z , $z+dz$, et $z-dz$.

- Étape 1: implémentation du maillage.

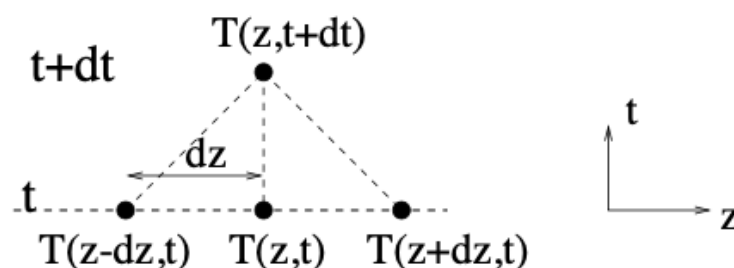
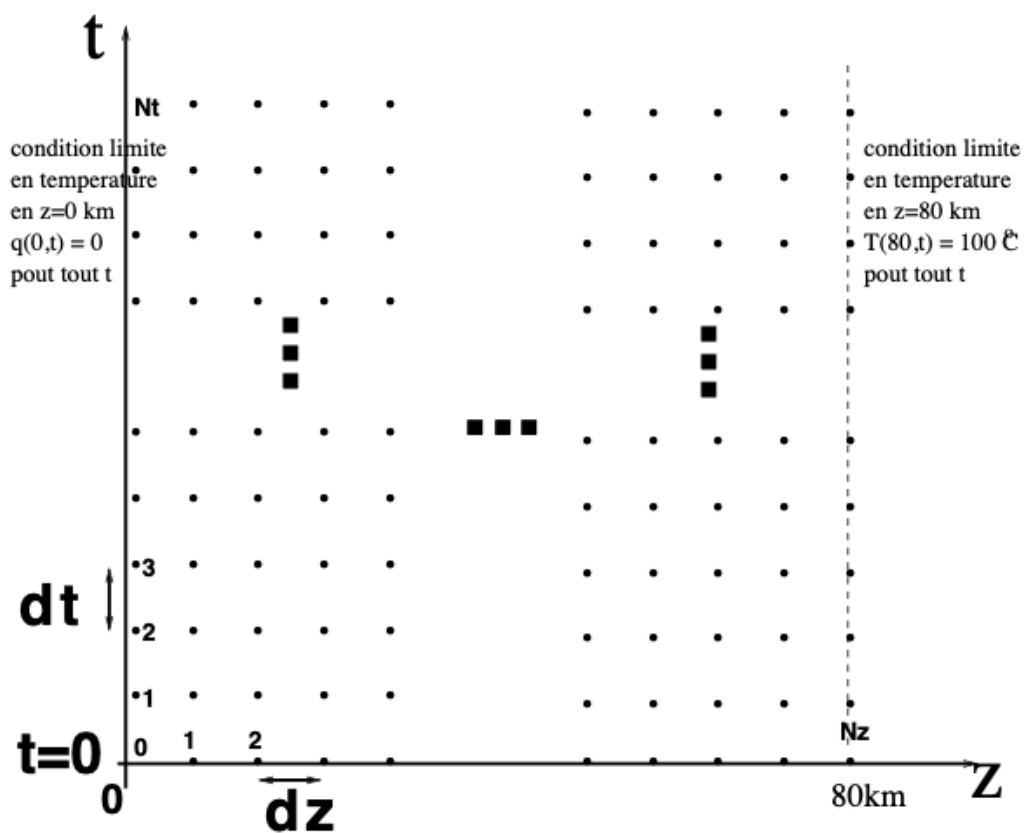


Schéma explicite

Le champ de température que l'on cherche à calculer dépend du temps et de l'espace, soit $T(z,t)$ une fonction de deux variables. Par conséquent, on définit un maillage couvrant le domaine en temps et en espace où l'on veut calculer la solution; c'est un domaine où l'on a en abscisse la profondeur z de 0 à 80 km et en ordonnées le temps à partir de $t=0$ jusqu'au dernier temps t choisi pour notre calcul.

Ce maillage est schématisé sur la figure suivante: en abscisse, on a la profondeur z avec N_z+1 points tel que $N_z \cdot dz$ (dz étant le pas d'espace) = 80km. Cela fait donc N_z intervalles. En ordonnées, on a le temps t avec N_t+1 points tel que $N_t \cdot dt$ = durée total du calcul.

- Étape 2: Initialisation



Maillage en temps et en espace comportant $(N_t + 1) * (N_z + 1)$ points.

La deuxième étape consiste à appliquer les conditions initiales du problème pour calculer la variable $T(z,0)$. Du plus, on spécifie les conditions limites sur les bords de notre maillage, i.e. en $z = 0$ et 80km.

- Étape 3: Application du schéma

Pour la dernière étape, on applique le schéma explicite à tous les points de la grille exceptés au premier et aux derniers points du maillage z .

Important: la stabilité du schéma explicite est donnée pour un pas de temps et d'espace qui satisfont la relation $dt < \frac{1}{2} \frac{dz^2}{\kappa}$.

4. Programmation du projet

- Le calcul de κ dépend à la fois de la profondeur et de la température. Définir une fonction qui prend ces deux arguments et renvoie κ en faisant attention aux unités.
- Programmation des étapes 1 et 2 pour $dz = 500\text{m}$, $dt = 4\,000$ ans, $Nt = 6000$.

Question 4: Pourquoi les conditions aux limites sont fondamentales ? À quel problème se heurterait-on si on voulait calculer avec le schéma explicite la valeur du champ de température en ces points ?

Question 5: Combien de points en z comporte le maillage ? Quelle est la valeur maximale dt permise ? (prendre la diffusivité de la croûte pour ce calcul).

Question 6: Trouver approximativement combien de temps doit «durer» notre calcul pour que la chaleur du bloc magmatique ait eu le temps de diffuser jusqu'à la profondeur $z = 80\text{km}$, grâce à un calcul d'ordre de grandeur avec la valeur de diffusivité de la croûte terrestre et l'épaisseur totale comme longueur caractéristique. Quel est la durée totale du calcul pour la discrétisation temporelle choisie ? Donner les résultats en Ma.

- Écrire des boucles for en t et z pour l'étape 3 afin de remplir la matrice T aux différentes températures et différentes profondeurs.
- Représenter les résultats en traçant le profil de température en profondeur pour différentes valeurs de t (6 courbes max) avec différentes couleurs. Interpréter les résultats.
- Comparer l'évolution temporelle de la température dans le bloc de magma (à 5km de profondeur), dans la croûte près de l'interface ($z=16\text{km}$) et proche du fond ($z=70\text{km}$). Ajouter une légende en km pour chaque courbe et un axe des abscisses en Ma. Interpréter les résultats.