

Enseignement de la géométrie à l'école primaire

Les modèles de développement de la pensée géométrique

L'enseignement de la géométrie s'opère sur un temps long, qui voit les élèves changer à plusieurs reprises leur regard sur ce que sont les objets de "la" géométrie ainsi que sur la façon d'agir sur eux. Au milieu du vingtième siècle et dans la continuité des travaux de Piaget, les chercheurs Pierre-Marie Van Hiele et Dina Van Hiele-Geldof ont proposé la modélisation du développement de la pensée géométrique en 5 niveaux :

- un niveau "visualisation" auquel la géométrie n'existe que par la perception et la comparaison d'objets du monde réel,
- un niveau "analyse" auquel la figure apparaît comme un représentant idéal d'un objet du monde réel, dont on peut étudier certaines caractéristiques,
- un niveau "déduction informelle", auquel il est possible de comprendre la notion de définition d'un objet (géométrique) et de mettre en place un raisonnement déductif sur des objets connus,
- un niveau "déduction formelle", auquel il est possible de raisonner sur des classes d'objets définis formellement,
- un niveau "rigueur", qui correspond au niveau le plus élevé, dans lequel la pratique mathématique s'inscrit dans un cadre axiomatique indépendant du monde réel.

Il est important de comprendre à propos de ces stades qu'ils s'excluent mutuellement : deux personnes qui ne sont pas au même niveau de pensée ne conçoivent pas la géométrie de la même façon et ne peuvent pas communiquer efficacement. Ce modèle a été retravaillé à plusieurs reprises et existe maintenant sous plusieurs déclinaisons légèrement différentes.

Catherine Houdement et Alain Kuzniak ont étudié plus spécifiquement l'apprentissage de la géométrie à l'école primaire, et proposent un modèle en trois registres qui est davantage centré sur les pratiques, qui s'inscrit globalement dans le cadre théorique des Van Hiele :

- la géométrie perceptive s'appuie sur des objets existants dont les caractéristiques sont identifiables à l'œil (surnommée "géométrie de l'œil").
- la géométrie instrumentée est fondée sur l'utilisation d'instruments pour mesurer ou vérifier la présence de propriétés (surnommée "géométrie de la main").
- la géométrie (hypothético-)déductive, ou axiomatique, est basée sur des concepts dont l'étude nécessite l'emploi d'un raisonnement de nature déductive (surnommée "géométrie de l'esprit").

Dans ce modèle, le passage d'un registre au suivant ne se réalise pas par une rupture nette, mais selon un processus évolutif sur un temps long.

La confusion entre registres est à l'origine de certains paradoxes, comme le puzzle de Carroll.



la perception d'un faux alignement de points fait croire à l'égalité $64=65$

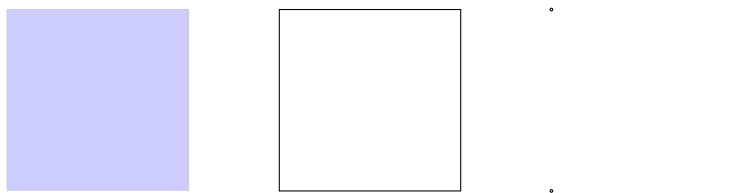
Perception et spécificités des figures

Un objectif de la géométrie à l'école primaire est d'amener l'élève à identifier des spécificités graphiques qui distinguent le dessin, la figure et le schéma :

- le dessin est une production libre qui peut avoir pour but de représenter fidèlement une vue d'un objet (on parle alors de dessin d'observation), mais qui n'est pas destiné à une interprétation spécifique ; le dessin appartient au support sur lequel il est défini,
- le schéma est une représentation d'un concept ou d'un objet idéalisé dont on ne conserve que les caractéristiques identifiées, qui sont généralement simplifiées, il n'est pas un objet de son support physique,
- la figure, comme le schéma, est un objet idéal spécifique au champ géométrique dont les informations connues sont accessibles par le biais d'un codage.

La perception des figures s'appuie sur différents types de vision :

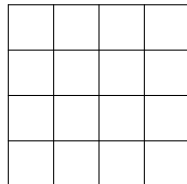
- la vision surface (aussi appelée vision "2d"),
- la vision évidée (ou vision complémentaire),
- la vision ligne (vision "1d"),
- la vision pointée (vision "0d").



Visions surface, ligne et pointée d'un carré

Les figures complexes peuvent être perçues comme des superpositions ou des juxtapositions de figures simples, certaines modifications (prolongement de traits, épaisseur des contours) permettant d'inverser la reconnaissance initiale.

On parle de sur-figure lorsque le support ne présente pas l'intégralité de la figure, mais permet de construire mentalement la figure considérée. De nombreuses illusions d'optique sont construites sur le principe qui amène le cerveau à analyser automatiquement certaines figures, en les complétant ou en les interprétant de façon erronée. Par exemple, dans la figure suivante, il est possible de percevoir immédiatement 16 (ou 17) carrés, tandis que le nombre réel de carrés supportés par le quadrillage est 30, les nœuds de ce quadrillage permettant de définir encore d'autres carrés.



Codage des figures

Le codage permet d'écrire ou lire des caractéristiques géométriques sur une figure. Il peut concerner la nomenclature de points ainsi que la présence de propriétés : angles droits, égalités de longueurs, longueurs ou angles inégaux, etc.

Certaines propriétés géométriques ne peuvent pas faire l'objet d'un codage, ou bien de façon non standardisée, c'est par exemple le cas du parallélisme entre droites ou encore l'alignement de points.

Le codage est spécifique à une figure donnée et sensible à la modification d'informations. Le déplacement, l'ajout ou le retrait d'élément de la figure peut invalider un codage ou le rendre ambigu.

Classification des activités géométriques

Selon Raymond Duval, il est possible de regrouper les activités géométriques en quatre "métiers" :

- le géomètre-botaniste identifie, nomme, classe ou catégorise les formes géométriques,
- le géomètre-arpenteur mesure et manipule les grandeurs relatives aux formes étudiées,
- le géomètre-constructeur apprend à manipuler les instruments qui permettent la construction de figures,
- le géomètre-inventeur-bricoleur mobilise les connaissances pour résoudre des problèmes.

Classification : partition ou hiérarchie

Dans tous les modèles de développement, la classification des formes est initialement perçue sous forme de partition : les différents types (ou natures) de figures sont indépendants.

Un niveau de compréhension ultérieur doit rendre compte des liens logiques entre certains types de figures, notamment les implications ; on parle alors de classification hiérarchique, qui satisfait l'héritage des propriétés. Par exemple, à partir du niveau déductif, les carrés sont des cas particuliers de rectangles, et toute propriété satisfaite par un rectangle se retrouve dans la liste des propriétés satisfaites par un carré.

Les deux types de figures élémentaires pour lesquelles une classification hiérarchique exhaustive peut (et doit) être menée sont les triangles et les quadrilatères. On peut rendre compte de cette organisation par une représentation sous forme de diagramme de Venn, ou bien sous forme d'arbres.

Environnement et instruments de géométrie

On appelle environnement (en géométrie) l'ensemble des supports, matériels et objets technologiques permettant le travail autour d'objets géométriques et d'actions ou transformations autorisées.

Parmi les environnements couramment utilisés, on peut citer :

- assemblage de pièces (tangram),
- planche à clous-ficelle-élastique,
- papier-crayon-instrument(s) (en précisant quels instruments sont autorisés ou interdits),
- papier-ciseaux-pliage,
- numérique (utilisation d'un logiciel, par exemple GeoGebra ou Scratch).

Instruments en géométrie (plane)

Ce qui définit l'instrument (on pourra aussi parler d'outil, la différence entre outil et instrument est que l'instrument est construit afin de répondre à une fonctionnalité) est l'objet auquel on spécifie une intentionnalité, qui peut être liée à la construction d'un objet géométrique ou à la vérification d'une propriété pour un objet déjà construit, en lien avec une notion géométrique (par exemple, présence d'un angle droit à l'aide d'une équerre). On trouve parmi les instruments élémentaires à l'école primaire :

- la règle, permettant de relier des points ou de vérifier leur alignement lorsqu'elle est non graduée ; avec ajout de graduation, de mesurer une longueur ou de placer un point,
- l'équerre, pour construire une droite perpendiculaire à une autre ou vérifier la présence d'un angle droit,
- le compas, pour tracer un cercle, comparer deux longueurs ou reporter une longueur.

D'autres instruments peuvent être à disposition des élèves, comme le guide-âne (droites parallèles sur une feuille calque) ou le gabarit (d'angle). Il est également possible de modifier les instruments pour réduire leur usage premier (compas à pointe sèche, compas à écart bloqué).

Programme de construction

Un programme de construction est un algorithme qui a pour but de construire un objet en suivant un ensemble d'étapes ordonnées. Le programme doit comporter le nom des objets géométriques construits, cependant il ne doit pas comporter de référence aux outils permettant la construction des objets mentionnés. Dans un programme de construction, l'orientation des objets n'est pas pertinente puisque l'orientation n'est pas un critère de définition de l'objet considéré : les précisions "à gauche", "à droite", "en haut", "en bas" sont inutiles. On peut en revanche préciser qu'un objet se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur d'un autre.

Dans les activités de construction, on distingue la validité de la procédure de construction (justesse) de la conformité graphique de la production (précision).



Construire le triangle ABD : précis mais non juste à gauche, juste mais non précis à droite

Variables didactiques

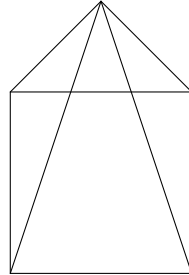
Les principales variables didactiques des exercices proposés aux élèves portent sur :

- l'environnement ou le support (feuille unie ou quadrillée, papier calque),
- la complexité des figures,
- les outils à disposition de l'élève,
- les dimensions ainsi que la disposition du modèle étudié,
- la nature de la tâche à réaliser.

Difficultés rencontrées par les élèves

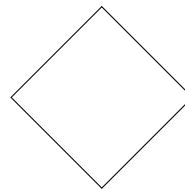
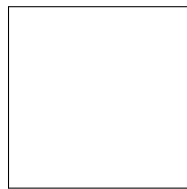
Les principales difficultés rencontrées par les élèves dans les exercices de géométrie sont :

- des confusions entre les types de schémas et les types d'objets représentés (changement de registre de géométrie ; mauvaise compréhension des notions de point, de droite, etc.).



Erreur-type fréquente en CM2 pour un dessin de pyramide (Parzysz)

- des représentations spatiales erronées, provoquant l'absence de reconnaissance d'objets non prototypiques (configuration non horizontale ou verticale) ou des erreurs dans les propriétés des objets (en particulier dans les notions de symétries),



Le carré de droite est reconnu comme seulement losange par une grande proportion d'élèves

- des problèmes liés à l'utilisation du langage géométrique (vocabulaire inadapté, confusion, etc.),
- des problèmes d'utilisation d'instruments (employés pour une fonction inadaptée, ou non maîtrisés).

Autres considérations didactiques

Certaines notions géométriques peuvent être étudiées à partir de différentes approches. C'est par exemple le cas du parallélisme, qui peut être présenté aux élèves comme :

- des droites qui ne s'intersectent pas,
- des droites qui sont d'écart constant,
- des droites de même direction,
- des droites formant un angle constant par rapport à une même autre droite (variante : une perpendiculaire commune)
- des droites supportant les côtés d'un rectangle (parallélogramme, trapèze)
- des droites étant un objet initial et un objet image par une transformation géométrique (transformation)

Ces différentes approches ne mettent pas l'accent sur les mêmes propriétés et présentent chacune leurs avantages et limites en termes de manipulation, validation, conceptualisation, etc.

Programmes pour le cycle 2

Au CP

Les connaissances sur les figures de référence (carré, rectangle, triangle, cercle) s'acquièrent à partir de manipulations, de descriptions et de résolutions de problèmes. Les concepts généraux de la géométrie plane (droite, point, segment) sont introduits en situation, sans faire l'objet de définitions formelles. Il est particulièrement important que le professeur s'exprime dans un langage précis, utilisant le vocabulaire géométrique approprié, et qu'il encourage les élèves à se l'approprier et, progressivement, à l'utiliser. Ce vocabulaire prend son sens grâce aux manipulations et aux situations d'action proposées.

Au CE1

L'acquisition des connaissances sur les figures de référence (carré, rectangle, triangle, cercle, disque) se poursuit à partir de manipulations, de descriptions et la résolution de problèmes. Les concepts généraux de la géométrie plane (droites, points, segments) sont introduits en situation, sans faire l'objet de définitions formelles. Il est particulièrement important que le professeur s'exprime dans un langage précis utilisant le vocabulaire géométrique approprié et qu'il encourage les élèves à se l'approprier et, progressivement, à l'utiliser. Ce vocabulaire prend son sens grâce aux manipulations et aux situations d'action proposées. Les tracés à la règle, à l'équerre et au compas présentent des difficultés ; ils nécessitent un apprentissage spécifique et un entraînement régulier. Il s'agit de développer l'habileté manuelle, la concentration et l'attention.

Au CE2

L'acquisition des connaissances sur les figures de référence se poursuit à partir de descriptions, de constructions et de résolutions de problèmes. Il est particulièrement important que le professeur s'exprime dans un langage précis utilisant le vocabulaire géométrique approprié et qu'il encourage les élèves à se l'approprier et, progressivement, à l'utiliser. Ce vocabulaire prend son sens grâce aux manipulations et aux situations d'action proposées. Les tracés à la règle, à l'équerre et au compas présentent des difficultés ; ils nécessitent un apprentissage spécifique et un entraînement régulier. Il s'agit de développer l'habileté manuelle, la concentration et l'attention.

Programmes pour le cycle 3

Au CM1 et au CM2

Dans la continuité des apprentissages du cycle 2, l'acquisition des connaissances sur les figures de référence et sur les relations géométriques se poursuit lors de descriptions, de constructions et de résolutions de problèmes. Il est particulièrement important que le professeur s'exprime dans un langage adéquat utilisant un vocabulaire géométrique précis et qu'il encourage les élèves à se l'approprier et, progressivement, à l'utiliser. Ce vocabulaire prend son sens grâce aux constructions et aux problèmes proposés. Si l'enseignant utilise de manière rigoureuse les notations usuelles avec des parenthèses pour la droite (AB), des crochets pour le segment [AB], une parenthèse et un crochet pour la demi-droite (AB) et aucune parenthèse pour la longueur AB, aucune connaissance de ces conventions n'est exigible pour les élèves : les consignes expliciteront donc systématiquement les symboles utilisés. Par exemple, il ne sera pas demandé aux élèves de "tracer [AB]", mais de "tracer le segment [AB]".