

Corrigé de l'évaluation du 18 novembre (2h)

On pourra utiliser sans démonstration le lemme suivant :

Lemme : On se donne $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = l$ existe. Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ existe et vaut l .

Exercice 1. Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ et soit $y \in C^1(I)$, I intervalle, une solution de $y' = f(y)$. Montrez que si $y \neq 0$, alors ses zéros sont isolés.

Solution : Comme $f \in C^1(\mathbb{R})$, on est dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz. Soit $x_0 \in I$ un zéro éventuel de y . Comme y est C^1 , le DL1 en x_0 existe et

$$y(x) = y'(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0)) \text{ pour } x \rightarrow x_0.$$

Supposons que $y'(x_0) \neq 0$ et posons $\alpha := \frac{|y'(x_0)|}{2}$. On a alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|y(x)|}{|x - x_0|} = |y'(x_0)| > \alpha$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que $\frac{|y(x)|}{|x - x_0|} > \alpha$ pour tout $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[- \{x_0\}$ et donc $y(x) \neq 0$ pour $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[- \{x_0\}$. Donc x_0 est un zéro isolé.

Supposons maintenant que $y'(x_0) = 0$. Comme $y' = f(y)$, on a $0 = y'(x_0) = f(y(x_0)) = f(0)$. Posons $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction nulle. Dans ce cas, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(y) \\ y(x_0) = 0 \end{array} \right. \text{ dans } I \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta' = 0 = f(0) = f(\theta) \\ \theta(x_0) = 0 \end{array} \right. \text{ dans } \mathbb{R}$$

Les fonctions y et θ vérifient la même équation avec même condition initiale. On est dans le cadre du th de CL. Donc $y \equiv \theta$ sur $I \cap \mathbb{R}$, donc $y \equiv 0$ sur I , ce qui contredit l'hypothèse sur y .

Conclusion : tout zéro éventuel de y est isolé.

Exercice 2. Déterminez la solution maximale de

$$y' + xy = xy^3 \text{ avec } y(0) = 2.$$

Indication : après justification, on pourra utiliser la fonction $z := y^{-2}$.

Solution : On écrit $y' = f(x, y)$ avec $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy^3 - xy$ pour $x, y \in \mathbb{R}$. La fonction f est C^1 donc on est dans le cadre de Cauchy-Lipschitz. Soit donc $y \in C^1(I)$ avec $0 \in I$ la solution maximale du problème. Si jamais y s'annule en un point t_0 , alors y coïncide en un point avec la fonction nulle qui est aussi solution de l'EDO, donc $y \equiv 0$, ce qui est absurde car $y(0) = 2$. Donc $y(x) \neq 0$ sur I , or $y(0) > 0$ et y est continue, donc $y(x) > 0$ pour tout $x \in I$.

On pose $z = y^{-2}$ qui est donc bien définie et C^1 . On a

$$z' = -2y^{-3}y' = -2y^{-3}(-xy + xy^3) = -2x + 2xz \text{ avec } z(0) = \frac{1}{4}.$$

Equation homogène : $z'_H = 2xz_H$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z_H = \lambda e^{x^2}$ pour tout $x \in I$. Solution particulière : $z_p \equiv 1$. Solution générale : $z = 1 + \lambda e^{x^2}$ pour tout x . Or $z(0) = 1/4$, donc

$$z(x) = 1 - \frac{3}{4}e^{x^2} \text{ pour tout } x \in I \ni 0.$$

Or $z = y^{-2} > 0$, donc $e^{x^2} < 4/3$ pour tout $x \in I$ puis

$$I \subset \left] -\ln \frac{4}{3}, \ln \frac{4}{3} \right[\text{ et } y(x) = \frac{1}{\sqrt{z(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}e^{x^2}}} \text{ pour tout } x \in I.$$

L'intervalle I étant maximal, on a donc

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}e^{x^2}}} \text{ pour tout } x \in I = \left] -\ln \frac{4}{3}, \ln \frac{4}{3} \right[.$$

Exercice 3. On se donne une fonction $f \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $f(s) > 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{f(s)} < +\infty.$$

On se donne $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrez que la solution maximale de $x' = f(x)$ avec $x(t_0) = x_0$ est définie sur l'intervalle borné $]a, b[$ avec

$$a := t_0 - \int_{-\infty}^{x_0} \frac{ds}{f(s)} \text{ et } b := t_0 + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{ds}{f(s)}$$

Solution : Posons $F(x) := \int_{x_0}^x \frac{ds}{f(s)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cette fonction est bien définie et C^1 sur $\mathbb{R}$. De plus, il suit des hypothèses que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = l_+ \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = l_- \in \mathbb{R}$ existent. Soit $x \in C^2([a, b])$ la solution maximale recherchée. On a $(F \circ x)'(t) = F'(x(t))x'(t) = \frac{x'(t)}{f(x(t))} = 1$ pour tout $t \in]a, b[$, puis

$$F(x(t)) - F(x_0) = t - t_0 \text{ pour tout } t \in]a, b[. \quad (\star)$$

Comme F est bornée, alors $t - t_0$ est borné uniformément pour $t \in]a, b[$, donc a, b sont finis et donc $-\infty < a < b < +\infty$. Comme x est une solution maximale, elle explose donc en a et b . Or $x' > 0$, donc x est croissante : Il suit donc que

$$\lim_{t \rightarrow a} x(t) = -\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow b} x(t) = +\infty.$$

En faisant $t \rightarrow a$ et $t \rightarrow b$ dans $(\star)$, on obtient alors

$$\int_{x_0}^{-\infty} \frac{ds}{f(s)} = l_- - F(x_0) = a - t_0 \text{ et } \int_{x_0}^{+\infty} \frac{ds}{f(s)} = l_+ - F(x_0) = b - t_0$$

et le résultat suit.

Exercice 4. On se donne le système (qu'on ne cherche PAS à résoudre)

$$\begin{cases} x' = \sin(x + y) \\ y' = e^x - 1 \end{cases}.$$

On se donne une solution maximale sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ non vide. Soit $t_0 \in I$.

- Montrez que $|x(t)| \leq |x(t_0)| + |t - t_0|$ pour tout $t \in I$.
- Déduisez-en une majoration de $|y(t)|$ pour $t \in I$.
- Déduisez-en que $I = \mathbb{R}$

Solution : Remarque préliminaire : $F : (x, y) \mapsto (\sin(x + y), e^x - 1)$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$, donc la théorie de Cauchy-Lipschitz s'applique. Pour $t \in I$, on a $|x'(t)| \leq 1$, donc $|x(t) - x(t_0)| \leq |t - t_0|$ pour tout $t \in I$. L'inégalité recherchée est conséquence de l'inégalité triangulaire. On obtient donc $|y'(t)| \leq e^{x(t)} + 1 \leq e^{|t-t_0|+|x(t_0)|} + 1 \leq e^{|t_0|+|x(t_0)|}e^{|t|} + 1$ pour $t \in I$. Ainsi, si $t \in I \cap [-T, T]$ pour $T > 0$, on obtient

$$|x'(t)| \leq |x(t_0)| + |t_0| + T$$

et

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq |y(t_0)| + \left| \int_{t_0}^t (e^{|t_0|+|x(t_0)|}e^T + 1) ds \right| = |y(t_0)| + |t - t_0|(e^{|t_0|+|x(t_0)|}e^T + 1) \\ &\leq |y(t_0)| + (T + |t_0|)(e^{|t_0|+|x(t_0)|}e^T + 1) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $T > 0$, il existe $C(T) > 0$ tel que $|x(t)| + |y(t)| \leq C(T)$ pour tout $t \in I \cap [-T, T]$. En d'autres termes : les solutions sont bornées uniformément sur tout intervalle borné. Soit donc $]a, b[$ un intervalle maximal non vide (c'est un ouvert de $\mathbb{R}$). Si $b < +\infty$, alors pour $t_0 \in]a, b[$, $[t_0, b[\subset]a, b[\cap [t_0, |b| + |t_0|] \subset I \cap [-T, T]$ avec $T = |t_0| + |b|$, donc $(x(t), y(t))$ bornée sur $[t_0, b[$ et n'explose pas en b , ce qui est contradictoire. Donc $b = +\infty$. De même $a = -\infty$, donc $I = \mathbb{R}$.

Exercice 5. On se donne un champ de vecteur $X \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et on note $B = B(0, 1)$ la boule unité de $\mathbb{R}^n$ centrée en 0. On suppose que

$$\langle X(p), p \rangle < 0 \text{ pour tout } p \in \partial B.$$

On se donne $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ une solution de $x'(t) = X(x(t))$ pour tout $t \in I$, où I est un intervalle d'intérieur non-vidé.

- (1) Montrez que s'il existe $t_0 \in I$ tel que $x(t_0) \in \partial B$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $x(t) \in B$ pour tout $t \in]t_0, t_0 + \delta[\cap I$. On pourra utiliser $t \mapsto \|x(t)\|^2$ où $\|\cdot\|$ est la norme Euclidienne usuelle.
- (2) On suppose qu'il existe $T \in I$ tel que $x(T) \in \overline{B}$. Montrez alors que $x(t) \in \overline{B}$ pour tout $t \in I, t \geq T$.

Solution : Supposons qu'il existe $t_1 \in I, t_1 \geq T$, tel que $x(t_1) \notin \overline{B}$. Soit alors $t_0 = \sup\{t \in I \cap [T, t_1] / x(t) \in \overline{B}\} = \sup[T, t_1] \cap x^{-1}(\overline{B})$. Montrons que ce sup est atteint en $t_0 \in I$ et que $x(t_0) \in \partial B$ (attention à l'argument fermé-borné car I n'est pas nécessairement fermé). Comme $T, t_1 \in I$, alors $[T, t_1] \subset I$. Soit $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $t_k \in [T, t_1], x(t_k) \in \overline{B}$ pour tout k et $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = t_0$. Comme $[t_1, T]$ compact, alors $t_0 \in [T, t_1] \subset I$. A la limite dans I , on a donc $x(t_0) \in \overline{B}$. Du coup $t_0 < t_1$ et il existe $\epsilon > 0$ tel que $[t_0, t_0 + \epsilon] \subset I$. Par définition, on a $x(t) \notin \overline{B}$ pour tout $t \in]t_0, t_0 + \epsilon]$, et donc, par continuité, $\|x(t_0)\| \geq 1$, puis $x(t_0) \in \partial B$. On se donne alors $\delta > 0$ comme dans la question précédente, et donc $x(t) \in \overline{B}$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + \min\{\epsilon, \delta\}] \subset I$, ce qui contredit la définition de t_0 . D'où la contradiction et donc $x(t) \in \overline{B}$ pour tout $t \geq T, t \in I$.

Exercice 6. On considère ici une solution maximale $y \in C^2(I)$ de $(E) : y'' + y^5 + y^3 = 0$.

Remarque essentielle : La fonction $y \mapsto y^5 + y^3$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, donc la théorie de Cauchy-Lipschitz s'applique.

- (1) Déterminez une intégrale première du problème, à savoir une fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F(y(t), y'(t)) = C$ pour tout $t \in I$.

Solution : On multiplie (E) par y' et on intègre. Ainsi, $F(y, y') = \frac{(y')^2}{2} + \frac{y^6}{6} + \frac{y^4}{4}$ convient et

$$\frac{(y'(t))^2}{2} + \frac{y(t)^6}{6} + \frac{y(t)^4}{4} = C \text{ pour tout } t \in I$$

- (2) Montrez que y et y'' sont bornées sur I .

Solution : Il suit de l'inégalité précédente que $y(t)^6 \leq 6C$ donc $|y(t)| \leq (6|C|)^{1/6}$. De même $|y'(t)| \leq (2|C|)^{1/2}$ pour tout $t \in I$. Puis $|y''(t)| \leq |y(t)|^5 + |y(t)|^3 \leq (6|C|)^{5/6} + (6|C|)^{2/6}$ pour tout $t \in I$. Ceci prouve que y, y', y'' sont bornées sur I ,

- (3) Montrez que $I = \mathbb{R}$.

Solution : L'intervalle I est un ouvert de $\mathbb{R}$, donc $I =]a, b[$ avec $a, b \in [-\infty, +\infty]$ et $a < b$. Si $b < \infty$, alors $t \mapsto (y(t), y'(t))$ doit sortir de tout compact au voisinage de b , ce qui est absurde car ce couple reste borné. Donc $b = +\infty$. De même $a = -\infty$. Puis $I = \mathbb{R}$.

- (4) On suppose qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $y'(x) \neq 0$ pour tout $x > b$. Montrez que y est monotone sur $[b, +\infty[$. Déduisez-en que y et y' ont une limite en $+\infty$. Déduisez-en une contradiction.

Solution : La fonction y' étant continue et ne s'annulant pas sur l'intervalle $]b, +\infty[$, il suit du théorème des valeurs intermédiaires qu'elle a un signe constant. Donc soit $\{y'(t) > 0 \text{ pour tout } t > b\}$ soit $\{y'(t) < 0 \text{ pour tout } t > b\}$. Donc y est strictement monotone et bornée sur $]b, +\infty[$, elle admet donc une limite lorsque $t \rightarrow +\infty$, mettons $l_1 \in \mathbb{R}$. Comme $|y'(t)| = \sqrt{2C - \frac{y(t)^6}{3} + \frac{y(t)^4}{2}}$ pour tout t , elle admet une limite lorsque $t \rightarrow +\infty$, puis, comme y' est de signe constant, $y'(t)$ admet une limite $l_2 \in \mathbb{R}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Il suit de

l'équation que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y''(t) = -l_1^5 - l_1^3 = -l_1^3(1 + l_1^1)$. Il suit du lemme rappelé en début de problème que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{t} = l_2 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y'(t)}{t} = -l_1^3(1 + l_1^1).$$

Sachant que y et y' sont bornées, on récupère $l_1 = l_2 = 0$. En passant à la limite dans l'intégrale première il vient $C = 0$, puis $\frac{(y'(t))^2}{2} + \frac{y(t)^6}{6} + \frac{y(t)^4}{4} = 0$ puis $y(t) = y'(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui contredit l'hypothèse que y' ne s'annule pas sur $]b, +\infty[$.

- (5) Montrez que y admet au moins 7 points critiques.

Solution : Supposons que y' s'annule au plus un nombre fini de fois. Soit alors $b \in \mathbb{R}$ le plus grand zéro de y' (avec $b = 0$ si y' ne s'annule pas). Alors $y'(t) \neq 0$ pour $t > b$. Ce qui est absurde d'après la question précédente. Donc y' s'annule un nombre infini de fois, donc au moins sept fois.

- (6) Montrez alors qu'il existe $t_1 < t_2$ réels tels que $(y(t_1), y'(t_1)) = (y(t_2), y'(t_2))$.

Solution : Soient $\tau_1 < \dots < \tau_7 \in \mathbb{R}$ des points tels que $y'(\tau_i) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, 7$. Il suit de l'intégrale première que $P(y(\tau_i)) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, 7$ avec $P(X) = \frac{X^6}{6} + \frac{X^4}{4} - C$. Si les $y(\tau_i)$ sont tous distincts, alors P admet 7 zéros distincts, ce qui est absurde car c'est un polynôme de degré 6. Donc il existe $i \neq j$ tels que $y(\tau_i) = y(\tau_j)$. On peut supposer que $i < j$ et on pose alors $t_1 := \tau_i$ et $t_2 = \tau_j$.

- (7) Déduisez-en que y est périodique.

Solution : On pose $z(t) := y(t + t_2 - t_1)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a immédiatement que $z'' + z^5 + z^3 = 0$ sur $\mathbb{R}$. De plus $z(t_1) = y(t_2) = y(t_1)$ et $z'(t_1) = y'(t_2) = 0 = y'(t_1)$. Ainsi, y et z vérifient la même équation différentielle avec les mêmes conditions initiales en t_1 : d'après l'unicité pour les solutions maximales dans Cauchy-Lipschitz, on obtient $z(t) = y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, puis $y(t + T) = y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec $T = t_2 - t_1 > 0$. Donc y est périodique.