

EXAMEN FINAL (2h) - 16 Janvier 2024*Notes de cours et de TDs autorisées - calculatrices non autorisées.**La qualité de la rédaction et la présentation de la copie seront prises en compte dans la notation ! Toute tentative de recherche même infructueuse sera valorisée.*Barème indicatif (sur 30 points) en **rouge****Exercice 1 /5**

On considère la fonction

$$f : z \mapsto \frac{1}{z(z-1)}$$

sur l'ouvert $U := \mathbb{C} \setminus [0, 1]$. Montrer que pour tout lacet γ dans U :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 .$$

Exercice 2 (Intégrales de Fresnel) /7

On souhaite calculer les intégrales semi-convergentes

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$$

et

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt ,$$

avec des techniques d'Analyse complexe.

- Pour $R > 0$, on introduit le contour fermé Γ_R orienté dans le sens trigonométrique défini par la concaténation des 3 chemins suivants :
 - Le segment joignant 0 à R .
 - L'arc de cercle joignant R à $Re^{i\frac{\pi}{4}}$.
 - Le segment joignant $Re^{i\frac{\pi}{4}}$ à 0 .

On notera respectivement $\Gamma_{R,1}$, $\Gamma_{R,2}$ et $\Gamma_{R,3}$ ces 3 chemins.Dessiner soigneusement dans le plan complexe le contour Γ_R .

- Que vaut

$$\int_{\Gamma_R} e^{-z^2} dz ?$$

Justifier votre réponse.

- Montrer que

$$R \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \sin(t)} dt \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 .$$

Indication : On pourra utiliser sans justifier l'inégalité de concavité suivante :

$$\forall t \in [0, \pi/2], \quad \sin(t) \geq \frac{2}{\pi} t .$$

- On admet l'égalité classique

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

Établir que

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} = \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt .$$

Exercice 3 (Transformée de Fourier d'une loi de Cauchy) /6

La fonction

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t & \longmapsto \frac{1}{1+t^2} \end{cases}$$

est le prototype des fonctions appelées "fonctions Lorentziennes" en Physique, notamment en spectroscopie, où elles peuvent modéliser des raies d'absorption ou d'émission.

En probabilités, elle correspond (à une constante près) à la densité d'une loi de Cauchy et sa transformée de Fourier¹ est importante puisqu'elle caractérise entièrement la loi de Cauchy.²

Le but de cet exercice est de calculer cette transformée de Fourier :

$$\hat{\varphi}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-it\xi} dt .$$

1. Vérifier que la fonction $F : z \mapsto \frac{e^{-iz\xi}}{1+z^2}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec deux pôles simples que l'on précisera.
2. Dessiner soigneusement dans le plan complexe le demi-cercle D_R de centre 0 et de rayon $R > 1$ situé dans le demi-plan inférieur $\{\Im(z) < 0\}$ et orienté dans le sens anti-trigonométrique. (sens horaire)
En appliquant le théorème des résidus à la fonction précédente F sur ce lacet, calculer la quantité $\hat{\varphi}(\xi)$ pour tout $\xi > 0$.
3. Justifier, sans refaire de calculs qu'on obtient le même résultat pour $\hat{\varphi}(\xi)$ avec $\xi < 0$.
4. Conclure.

PROBLÈME. /12

La fonction *sinus cardinal*

$$x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$$

est une fonction importante en Physique et Ingénierie, notamment en optique ondulatoire et en traitement du signal.

Comme elle n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$, elle n'admet pas de transformée de Fourier au sens usuel.³

Le but de ce problème est de montrer cependant que, pour un paramètre réel $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} e^{itx} dx$$

existe au sens des intégrales impropres et plus particulièrement que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{\sin(x)}{x} e^{itx} dx = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } |t| > 1 \\ \pi & \text{lorsque } |t| < 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } t \in \{-1, 1\} \end{cases}$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_t : z \mapsto \frac{\sin(z)}{z} e^{itz} .$$

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_t \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ puis qu'elle se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.
Indication : La seconde partie de la question revient à montrer que 0 est une singularité artificielle. Dans la suite on notera toujours f_t ce prolongement.
2. Pour $R > 1$, on considère les 3 chemins suivants :
 - Le segment allant de $-R$ à -1 .
 - Le demi-cercle unité *inférieur* parcouru dans le sens trigonométrique. (i.e l'arc de cercle de centre 0 joignant -1 à 1 et passant par $-i$)
 - Le segment allant de 1 à R .

1. Aussi appelée fonction caractéristique en Probabilités.

2. Conséquence d'un résultat beaucoup plus général. Les transformées de Fourier sont de ce fait très utiles en Probabilités.

3. Mais comme elle est de carré intégrable elle admet plutôt ce que l'on appelle une transformée de Fourier-Plancherel.

Dessiner soigneusement dans le plan complexe le chemin ainsi obtenu, qu'on notera γ_R , puis montrer que pour tout $R > 1$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\gamma_R} f_t(z) dz = \int_{-R}^R f_t(z) dz .$$

Indication : Décomposer les deux intégrales et observer que l'égalité demandée est équivalente à la nullité de l'intégrale de f_t le long d'un certain lacet.

On pourra ensuite utiliser sans précisions le fait qu'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier admet une primitive. ($\mathbb{C}$ est simplement connexe)

3. En déduire que pour tout $R > 1$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-R}^R \frac{\sin(x)}{x} e^{itx} dx = I_R(t+1) - I_R(t-1) ,$$

où $I_R : s \mapsto \int_{\gamma_R} g_s(z) dz$ et pour $s \in \mathbb{R}$, $g_s : z \mapsto \frac{1}{2i} \frac{e^{isz}}{z}$.

4. Pour $R > 1$, on considère les 2 courbes suivantes :

- Le demi-cercle *supérieur* de centre 0 et de rayon R , parcouru dans le sens trigonométrique. (i.e l'arc de cercle de centre 0 joignant R à $-R$ et passant par iR)
- Le demi-cercle *inférieur* de centre 0 et de rayon R , parcouru dans le sens anti-trigonométrique. (i.e l'arc de cercle de centre 0 joignant $-R$ à R et passant par $-iR$)

On notera respectivement γ_R^+ et γ_R^- ces deux courbes.

Compléter le dessin de la question 2 en y ajoutant tous ces éléments puis montrer que pour tout $R > 1$ et $s \in \mathbb{R}$,

$$I_R(s) = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} e^{isRe^{i\theta}} d\theta .$$

Indication : On pourra appliquer le théorème des résidus à la fonction méromorphe g_s sur un lacet bien choisi.

5. Soit $s \in \mathbb{R}$. Calculer $\text{Res}(g_s, 0)$ puis montrer que pour tout $R > 1$,

$$I_R(s) = \pi - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^{isRe^{i\theta}} d\theta .$$

Indication : On pourra appliquer le théorème des résidus à la fonction méromorphe g_s sur un lacet bien choisi.

6. On rappelle une version adaptée du Théorème de convergence dominée :

Soit $(f_R)_{R>0}$ une famille de fonctions définies et continues sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction telles que :

- Pour tout $\theta \in [a, b]$,

$$f_R(\theta) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} f(\theta)$$

- Il existe une fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

$$\int_a^b g(\theta) d\theta < +\infty$$

et pour tout $R > 0$, $\theta \in [a, b]$,

$$|f_R(\theta)| \leq g(\theta)$$

Alors f est intégrable et

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^b f_R(\theta) d\theta = \int_a^b \left(\lim_{R \rightarrow +\infty} f_R(\theta) \right) d\theta = \int_a^b f(\theta) d\theta .$$

- (a) Montrer que pour tout $s < 0$,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^{2\pi} e^{isRe^{i\theta}} d\theta = 0 .$$

- (b) Montrer que pour tout $s > 0$,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} e^{isRe^{i\theta}} d\theta = 0 .$$

7. En déduire que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} I_R(s) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } s < 0 \\ \pi & \text{lorsque } s > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{lorsque } s = 0 \end{cases}$$

8. Conclure.