

I. Effusion gazeuse

(I.1) Entre les instant t et $t + dt$, $1/6$ ème des particules traversent s de 1 vers 2 sont contenues à t dans le cylindre de section s et de longueur $v^* dt \Rightarrow dN_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{6} N_1 \frac{sv^* dt}{V}$ molécules.

De même, $dN_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{6} N_2 \frac{sv^* dt}{V}$.

(I.2) Alors $\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt} = \frac{-dN_{1 \rightarrow 2} + dN_{2 \rightarrow 1}}{dt} = \frac{sv^*}{6V} (N_2 - N_1)$.

(I.3) Puisque $N_a = N_1 + N_2$, $N_1(t)$ est solution de l'équation différentielle $\frac{dN_1}{dt} + \frac{sv^*}{3V} N_1 = \frac{sv^*}{6V} N_a$
 $\Rightarrow N_1(t) = N_a/2 + Ae^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{3V}{sv^*}$. Or, $N_1(0) = N_a = N_a/2 + A$

Ainsi, $N_1 = \frac{N_a}{2} (1 + e^{-t/\tau})$ et $N_2 = \frac{N_a}{2} (1 - e^{-t/\tau})$.

(I.4) Selon la définition cinétique de T : $\frac{3}{2} k_B T = \frac{1}{2} m v^* \Rightarrow v^* = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \Rightarrow \tau = \frac{V}{s} \sqrt{\frac{3M}{RT}} \propto \sqrt{m}$.

AN : à $T = 300$ K si $P_{10} = 1$ bar, alors $V = RT_0/P_0$, on calcule avec $s = 1 \text{ mm}^2$: $\tau(H) = 39$ s et $\tau(O) = 155$ s.

(I.5) Puisque la diffusion est proportionnelle à $\sqrt{m}$, si on a deux types de particules de masse différente, on peut **enrichir les mélanges** en une des particules (séparer) en bloquant le système avant la fin. [→ wikipedia : enrichissement de l'uranium](#)

En pratique, la cloison entre les deux volumes est une paroi poreuse (beaucoup de trous) afin de rendre le phénomène plus rapide et celui-ci est répété plusieurs fois.

Bilan thermique

1/ Le travail total reçu par le gaz au cours du cycle vaut $W = \oint -P dV = -(\text{aire du cycle})$

soit $W = -\frac{1}{2} AC \times AB = -\frac{1}{2} V_0 \times (k-1) P_0$. On peut aussi décomposer en : $W_{AB} = 0$, $W_{BC} = -\int P dV = -\frac{(k+1)P_0 \times V_0}{2}$

(aire sous la courbe = trapèze), et $W_{CA} = \int_C^A -P dV = \int_A^C P dV = P_0 V_0$, d'où $W = 0 - \frac{k+1}{2} P_0 V_0 + P_0 V_0 = -\frac{k-1}{2} P_0 V_0$

D'autre part $Q_{AB} = n c_V (T_B - T_A)$ volume constant. Gaz parfait $\rightarrow c_V = \frac{R}{\gamma-1}$; Isochore $\rightarrow T_B = k T_A$

donc $Q_{AB} = \frac{nR}{\gamma-1} (k-1) T_A = \frac{k-1}{\gamma-1} P_0 V_0$

De même $Q_{CA} = n c_P (T_A - T_C)$ P const., $c_P = \frac{\gamma R}{\gamma-1}$ et isobare $\rightarrow T_A = \frac{T_C}{2}$

donc $Q_{CA} = \frac{n\gamma R}{\gamma-1} (T_A - 2T_A) = -\frac{\gamma R}{\gamma-1} n T_A = -\frac{\gamma}{\gamma-1} P_0 V_0$ GP

2/ 1^{er} principe appliqué au cycle : $\Delta U_{ABCA} = 0 = W_{\text{tot}} + Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA}$ 0 par hypothèse

$$\rightarrow -\frac{k-1}{2} P_0 V_0 + \frac{k-1}{\gamma-1} P_0 V_0 - \frac{\gamma}{\gamma-1} P_0 V_0 = 0 \rightarrow (k-1) \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma-1} \right] = \frac{\gamma}{\gamma-1}$$

$$\rightarrow (k-1) [-(\gamma-1) + 2] = 2\gamma \rightarrow k = 1 + \frac{2\gamma}{3-\gamma} = \frac{3+\gamma}{3-\gamma}$$

3/ Si la transformation était adiabatique, ($\rightarrow$ GP + quasistatique par hypothèse), on aurait $PV^\gamma = \text{const } K$ ce qui n'est visiblement pas le cas, car le segment de droite [BC] ne correspond pas à $P = \frac{K}{V^\gamma}$.

En fait BC n'est que globalement adiabatique, mais pas à chaque instant.

Cycle Moteur

1 gaz parfait $\rightarrow c_{pm} = c_{vm} + R$ (relation de Mayer)
 $c_{pm} = \gamma c_{vm} \rightarrow (\gamma - 1) c_{vm} = R \rightarrow c_{vm} = \frac{R}{\gamma - 1}$ et $c_{pm} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ soit $C_v = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ et $C_p = \frac{\gamma \gamma R}{\gamma - 1}$

gaz parfait $\rightarrow PV = nRT \rightarrow nR = \frac{PV}{T} \rightarrow C_v = \frac{P_0 V_A}{(\gamma - 1) T_0}$ et $C_p = \frac{\gamma P_0 V_A}{(\gamma - 1) T_0}$

2 Transformation isochore (seule caractéristique qui n'est pas déjà donnée explicitement par l'énoncé mais qui est nécessaire pour le calcul de Q_1 ; Tout le cycle est quasi-statique monobare...)

3 Le piston décolle $\rightarrow$ équilibre des forces: $-P_0 S - mg + P_1 S = 0 \rightarrow P_1 = P_0 + \frac{mg}{S} = 10^5 + \frac{10 \times 10}{100 \times 10^{-4}} = 10^5 + 10^4 = 1,1 \text{ bar}$

$n = \frac{P_0 V_A}{RT_0} = \frac{P_1 V_A}{RT_1} \rightarrow T_1 = T_0 \frac{P_1}{P_0} = 300 \times \frac{1,1}{1} = 330 \text{ K}$ (tant qu'on chauffe, le gaz n'est pas à l'équilibre thermique avec l'extérieur: $T_1 \neq T_0$)

4 la transformation $0 \rightarrow 1$ est isochore: $Q_0^1 = C_v (T_1 - T_0) = \frac{P_0 V_A}{\gamma - 1} \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right) = \frac{10^5 \times 330 \times 10^{-6}}{1,4 - 1} \left(\frac{330}{300} - 1 \right) = 825 \text{ J}$

5 Transformation isobare car à chaque instant le piston est quasiment à l'équilibre.

6 $T_2 = \frac{P_2 V_B}{nR} = \frac{P_2 V_B}{P_1 V_A} T_1 = \frac{V_B}{V_A} T_1 = \frac{1000 \text{ cm}^3}{330 \text{ cm}^3} \times 330 = 1000 \text{ K}$

7 $Q_1^2 = \Delta H_1^2 = C_p (T_2 - T_1) = \frac{\gamma P_0 V_A}{(\gamma - 1) T_0} (T_2 - T_1) = \frac{1,4 \times 10^5 \times 330 \times 10^{-6}}{(1,4 - 1) 300} (1000 - 330) = 258 \text{ J}$

8 2 $\rightarrow$ 3: isochore; 3 $\rightarrow$ 0: isobare

9 Au cours d'un cycle le travail total des forces de pression est nul (la descente compense la montée). dues à l'atmosphère extérieure ($P_{ex} = P_0$ constante)

Par contre, la masse m a été élevée d'une hauteur h , donc $W_{fourni} = mgh = -W$ $\rightarrow$ reçu par le système gaz-piston

Rappel

Montée: $P = P_1$
 Descente: $P = P_0$
 (isobares)

Vérification explicite:

$W_{reçu}$ par le gaz $W = W_{01} + W_{12} + W_{23} + W_{30} \rightarrow -P_1(V_B - V_A) + 0 + -P_0(V_A - V_B) + 0$ soit $W = (P_0 - P_1)(V_B - V_A)$ (avec $P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}$)

donc $W = -mg \frac{V_B - V_A}{S} = -mg(z_B - z_A) = -mgh = -W_{fourni}$

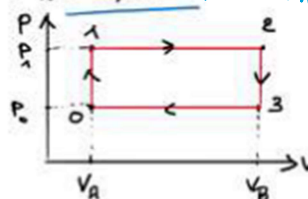
$W_{fourni} = mgh = 10 \times 10 \times \frac{(1 - 0,330) \times 10^{-3}}{100 \times 10^{-4}} = 6,7 \text{ J} \rightarrow W = -6,7 \text{ J}$

10 $r = \frac{-W}{Q_c} = \frac{-W}{Q_0^1 + Q_1^2} = \frac{6,7}{8,25 + 258} = 2,52\%$

12 $W = -\int_{ex} P dV = -\int P dV = \text{aire du cycle}$

lent Soit $W = -(P_1 - P_0)(V_B - V_A)$

$W = -(1,1 - 1,0) \times 10^5 \times (1 - 0,330) \times 10^{-3} = -6,7 \text{ J}$



(Ne surtout pas écrire: "cycle $\Rightarrow \int P dV = 0$ " car W n'est pas une fonction d'état)