

Mécanique des Milieux Continus

19 janvier 2021 1h30 Aucun document autorisé

En raison de la raréfaction des ressources, les industries du pétrole sont amenées à creuser de plus en plus profond pour pomper des pétroles de moins en moins bonne qualité. Nous nous intéresserons dans ce sujet à l'analyse des contraintes qui sont appliquées au niveau de la paroi du puit de pétrole, et qui seront de deux types :

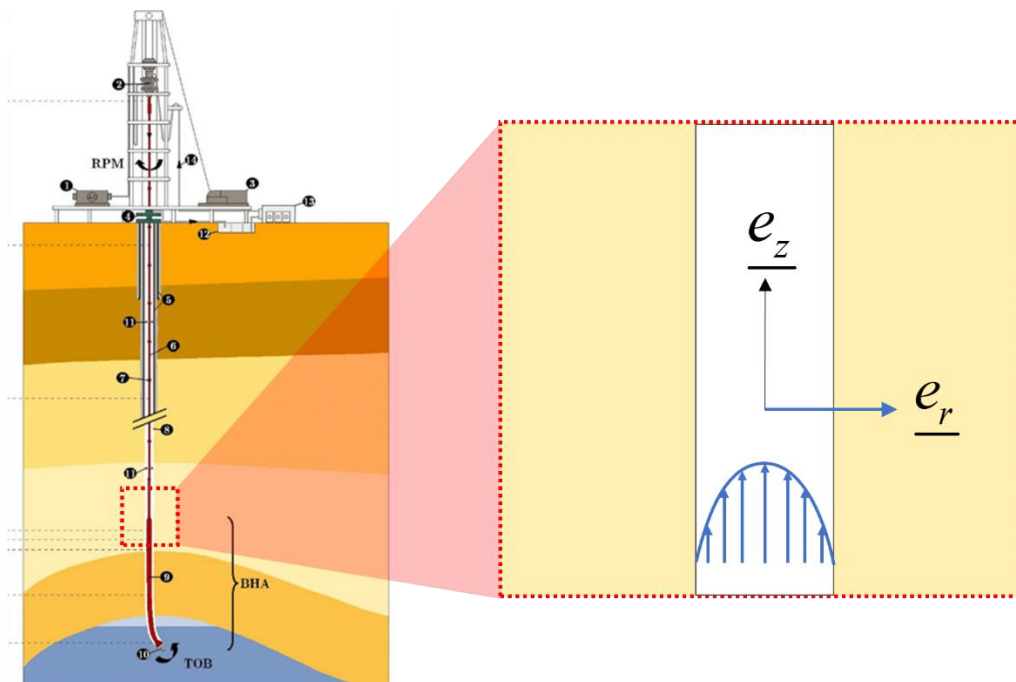
Partie 1

D'une part, l'écoulement d'un fluide visqueux au sein d'un puit (de section cylindrique) va créer des contraintes de cisaillement que l'on va tenter de déterminer.

Partie 2

D'autre part, la pression du fluide due à la hauteur du puit de pétrole va créer des contraintes de compression au niveau de la paroi, que l'on va également tenter de déterminer. On cherchera également à savoir à quelle distance on peut creuser sans risque un second puit.

R	Rayon du puit
H	hauteur du puit
p	pression du fluide à l'intérieur du puit
p_{atm}, p_{nappe}	pression atmosphérique et pression dans la nappe de pétrole
$\underline{V} = V \underline{e}_z$	vitesse d'écoulement du fluide
ρ, η	masse volumique et viscosité dynamique du pétrole
λ, μ	paramètres de Lamé des roches qui constituent la paroi du puit



Partie 1 : contrainte due à l'écoulement du fluide

Dans cette première partie on considère l'écoulement du pétrole (masse volumique ρ et viscosité dynamique η) à la vitesse $\underline{V} = V \underline{e}_z$ dans le puit de rayon R .

On considère que l'équation de Navier-Stokes est valide, et que l'écoulement est stationnaire. On peut facilement faire l'hypothèse des formes suivantes pour les champs de pression et de vitesses :

$$\underline{v} = v_z(r) \underline{e}_z \quad p = p(r, z)$$

1. A partir de l'équation de Navier-Stokes, écrire (sans les résoudre) le système d'équation qui régit l'écoulement du fluide. (/3)

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \left(\cancel{\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}} + \underline{\text{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right) = -\underline{\text{grad}}(p) + \eta \Delta \underline{v} + \rho \underline{g}$$

$$\underline{\text{grad}} p = \frac{\partial p}{\partial r} \underline{e}_r + \cancel{\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \underline{e}_\theta} + \frac{\partial p}{\partial z} \underline{e}_z$$

$$\Delta \underline{v} = \underline{\text{div}}(\underline{\text{grad}}(\underline{v}))$$

$$\left[\underline{\text{grad}} \underline{v} \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\text{grad}} \underline{v} \cdot \underline{v} = \underline{0}$$

$$\left[\Delta \underline{v} \right] = \left[\underline{\text{div}}(\underline{\text{grad}}(\underline{v})) \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \left[\underline{\text{grad}}(\underline{v}) \right]_{zz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\underline{\text{grad}}(\underline{v}) \right]_{rz} \end{pmatrix}$$

$$\Delta \underline{v} = \underline{\text{div}}(\underline{\text{grad}}(\underline{v})) = \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \underline{e}_z$$

$$\underline{0} = -\frac{\partial p}{\partial r} \underline{e}_r - \frac{\partial p}{\partial z} \underline{e}_z + \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \underline{e}_z - \rho g \underline{e}_z$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0 \end{cases}$$

2. A partir de l'équation obtenue, montrer que la solution du problème s'obtient en résolvant un système du type suivant :

$$\forall (r, z), \quad f(r) = g(z) \quad (/1)$$

Remarque : la solution d'une telle équation est nécessairement $f(r) = g(z) = K$ avec $K = \text{cste}$

Navier-Stokes a permis d'obtenir le résultat suivant

$$\begin{cases} (1) & -\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ (2) & \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0 \end{cases}$$

La première équation permet donc d'écrire que la pression ne dépend pas de r

La seconde équation s'écrit alors :

$$\underbrace{\mu \left(\frac{\partial^2 v_z(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \right)}_{f(r)} = \underbrace{\rho g + \frac{\partial p(z)}{\partial z}}_{g(z)}$$

3. D'après ce qui précède, on a donc on le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_z(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} = \frac{K}{\eta} \\ \frac{\partial p(z)}{\partial z} = K - \rho g \end{cases}$$

Montrer que le champ $v_z(r) = \frac{K}{\eta} \frac{r^2}{4} + A \ln r + B$ est solution de cette équation. (/1)

$$v_z = \frac{K}{\mu} \frac{r^2}{4} + A \ln r + B$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{K}{\mu} \frac{r}{2} + \frac{A}{r}$$

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} = \frac{K}{2\mu} - \frac{A}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{K}{2\mu} \cancel{\frac{A}{r^2}} + \frac{1}{r} \left(\frac{K}{\mu} \frac{r}{2} \cancel{\frac{A}{r}} \right) = \frac{K}{2\mu} + \frac{K}{2\mu} = \frac{K}{\mu} \Rightarrow \text{CQFD}$$

4. Déterminer les deux constantes A et B en considérant d'une part la condition d'adhésion à la paroi du puit, et d'autre part le fait que la vitesse est défini au centre du puit ($r=0$) (/2)

$$v_z(r) = \frac{K}{\eta} \frac{r^2}{4} + A \ln r + B$$

Si la vitesse est définie en $r=0$ alors $A=0$ nécessairement

De plus la condition d'adhésion à la paroi implique :

$$v_z(r=R) = \frac{K}{\eta} \frac{R^2}{4} + \cancel{A \ln r} + B = 0 \Rightarrow B = -\frac{K}{\eta} \frac{R^2}{4}$$

$$\text{En injectant on a donc : } v_z(r) = \frac{K}{\eta} \frac{r^2}{4} - \frac{K}{\eta} \frac{R^2}{4} = \frac{K}{4\eta} (r^2 - R^2)$$

5. Trouver la constante K en considérant le fait que la pression est égale à la pression p_{nappe}

en $z=0$ et à p_{atm} en $z=H$. On rappelle que : $\frac{\partial p(z)}{\partial z} = K - \rho g$ (/1)

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(z)}{\partial z} &= K - \rho g \\ p(z) &= (K - \rho g)z + cste \\ p(z=0) &= p_{nappe} \Rightarrow p(z) = (K - \rho g)z + p_{nappe} \\ p(z=H) &= p_{atm} \Rightarrow p(H) = (K - \rho g)H + p_{nappe} = p_{atm} \\ &\Rightarrow K = \frac{p_{atm} - p_{nappe}}{H} + \rho g = \frac{\Delta p}{H} + \rho g\end{aligned}$$

Remarque : on retrouve la forme (bien connue !) de l'écoulement *de Poiseuille* représenté sur la figure ci-dessus (on gardera cette nouvelle forme pour la question suivante) :

$$v_z(r) = V_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad \text{avec} \quad V_{\max} = -\frac{R^2}{4\eta} \left(\frac{\Delta p}{H} + \rho g \right) \quad (\text{idem que l'annale de Janvier 2016})$$

Finalité

On sait maintenant calculer le débit du pétrole qui va s'extraire du puit !

On constate sans surprise que la vitesse diminue avec la hauteur du puit et avec la viscosité, et augmente avec la différence de pression $\Delta p = p_{atm} - p_{nappe}$ et le rayon R .

6. On cherche à savoir si la contrainte de cisaillement générée par cet écoulement à la surface du puit sera négligeable ou non devant la contrainte due à la pression. Calculer la contrainte de cisaillement à la surface du puit. (/2)

$$\begin{aligned}\underline{v} &= v_z(r) \underline{e}_z = v_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \underline{e}_z \\ \underline{\underline{d}} &= \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v} + \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v} \right)^T \right) \\ \underline{\underline{grad}} \underline{v} &= \frac{\partial v_z}{\partial r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r = -2r \frac{v_{\max}}{R^2} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r \\ [\underline{\underline{d}}] &= -r \frac{v_{\max}}{R^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ [\underline{\underline{\tau}}(r=R)] &= -2R\eta \frac{v_{\max}}{R^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2\eta \frac{v_{\max}}{R} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

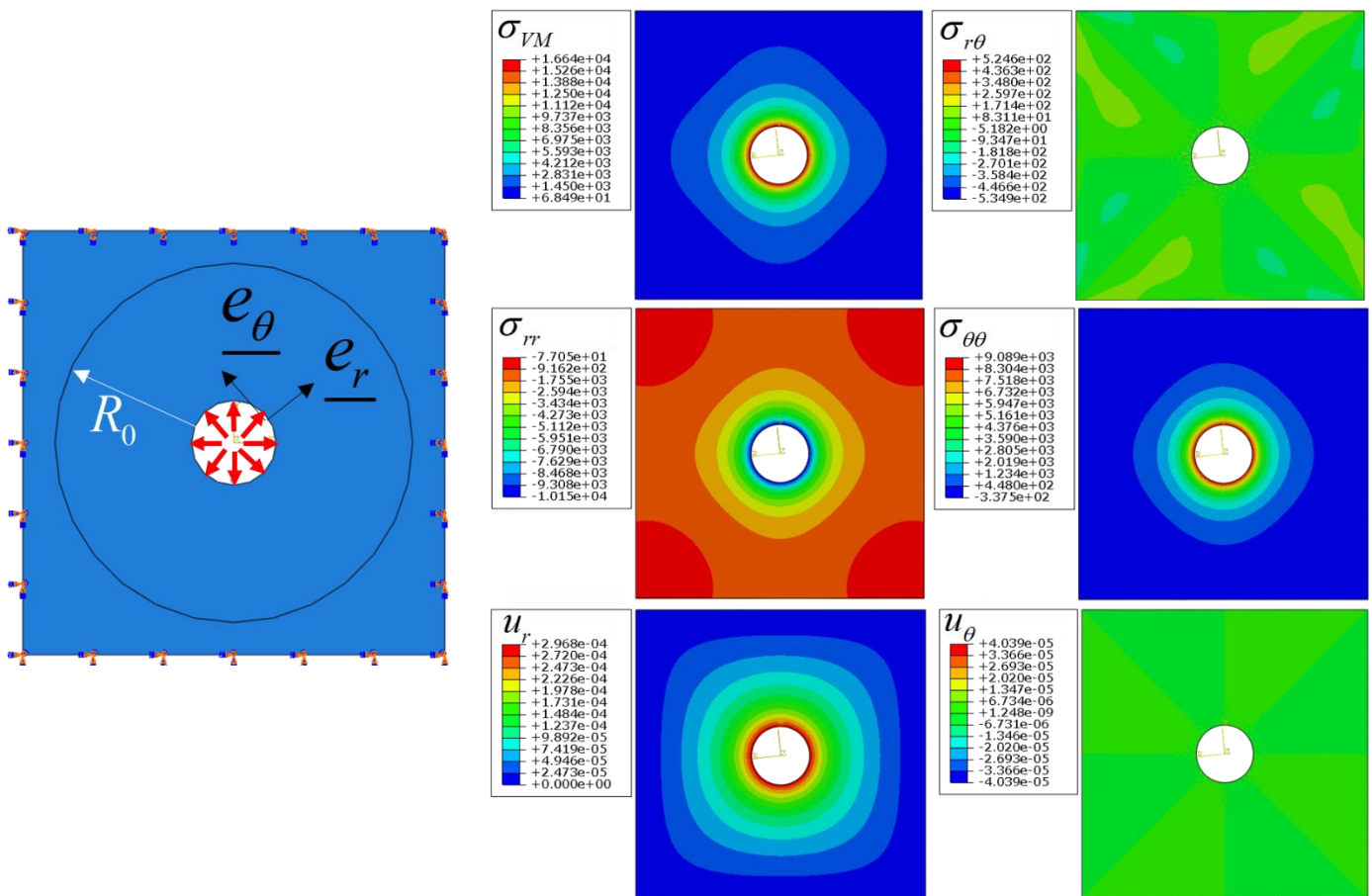
Finalité

On vient de calculer la contrainte à la surface du puit due à l'écoulement du pétrole. Une application numérique montrerait que cette contrainte est **négligeable** devant la contrainte qui va s'exercer en raison de la pression du fluide, que l'on va étudier désormais.

Partie 2 : contrainte due à la pression

On se place désormais au sein d'une section du puit. On considère donc une inclusion circulaire de rayon R dans plan infini, et dans toute la suite on se placera en deux dimensions seulement (hypothèse de « déformations planes » ici). On considère que l'hypothèse des petites perturbations sera respectée.

A la suite d'une modélisation numérique (utilisant la Méthode des Eléments Finis, programme du S8 à l'ENSEM), les différents résultats ci-dessous ont été obtenus. Nous allons tenter de retrouver des résultats semblables par le calcul.



7. La face interne du puit est soumise à la pression p . Traduire cette condition sur le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ en $r = R$. (/1)

(suite au dos)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} \\ \underline{t}(r=R, -\underline{e}_r) &= \underline{\underline{\sigma}}(r=R) \cdot (-\underline{e}_r) = p \underline{e}_r \\ \Rightarrow -\sigma_{rr}(r=R) \underline{e}_r - \sigma_{r\theta}(r=R) \underline{e}_\theta - \sigma_{rz}(r=R) \underline{e}_z &= p \underline{e}_r \\ \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr}(r=R) = -p \\ \sigma_{r\theta}(r=R) = \sigma_{\theta r}(r=R) = 0 \\ \sigma_{rz}(r=R) = \sigma_{zr}(r=R) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

8. A partir de la figure ci-dessus, justifier le fait qu'il soit possible de faire les hypothèses suivantes : $\underline{\underline{\sigma}}(r) = \sigma_{rr}(r) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta}(r) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta$ et $\underline{u}(r) = u_r(r) \underline{e}_r$ (/1)

Le problème est considéré plan donc dans le cas général :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}(r, \theta) &= \sigma_{rr}(r, \theta) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \sigma_{\theta r}(r, \theta) (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta) \\ \underline{u}(r, \theta) &= u_r(r, \theta) \underline{e}_r + u_\theta(r, \theta) \underline{e}_\theta \end{aligned}$$

La symétrie en θ est évidente sur toutes les figures et donc :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(r) \quad \text{et} \quad \underline{u} = \underline{u}(r)$$

On voit de plus que les $\sigma_{r\theta} \approx 0$ et $u_\theta \approx 0$ ce qui justifie les formes précédentes.

9. Calculer le tenseur des déformations linéarisé ce champ de déplacements (/1)

Par définition :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T) \quad \text{avec} \quad \underline{u}(r) = u_r(r) \underline{e}_r$$

Ici en 2D le tenseur gradient s'écrit tout simplement :

$$[\underline{\underline{Grad}} \underline{u}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} \end{pmatrix} \quad \text{et donc : } [\underline{\underline{\varepsilon}}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} \end{pmatrix}$$

10. Calculer le tenseur des contraintes correspondant, en considérant que le matériau qui constitue le sol est élastique linéaire et isotrope. (/1)

$$\text{On a : } \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{u_r}{r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta$$

(suite au dos)

$$\underline{\underline{\sigma}} = (\lambda \text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) \underline{\underline{I}} + 2\mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r + \frac{u_r}{r} \underline{\underline{e}}_\theta \otimes \underline{\underline{e}}_\theta \right)$$

D'après la loi de Hooke :

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} + \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} \end{pmatrix}$$

11. A partir de l'équation d'équilibre, montrer que le champ de déplacement doit satisfaire

l'équation différentielle : $\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 0$ (/2)

Remarque : ce calcul est identique à celui mené dans les examens de 2016, 2018 et 2019 !

L'équation d'équilibre dans ce cas s'écrit : $\underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \left(\underline{\underline{f}}^m - \underline{\underline{a}} \right) = \underline{\underline{div}} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}}$

En 2D et en coordonnées cylindriques on a donc :

$$[\underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r}) \end{pmatrix} = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0$$

En remplaçant par le résultat de la question précédente on obtient facilement :

$$\underline{\underline{\sigma}} = (\lambda \text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) \underline{\underline{I}} + 2\mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r + \frac{u_r}{r} \underline{\underline{e}}_\theta \otimes \underline{\underline{e}}_\theta \right)$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} + \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{1}{r} - \frac{u_r}{r^2} \right) = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 0}$$

12. Le champ : $u_r(r) = \frac{D}{r} + Cr$ est solution de cette équation. A partir de la figure ci-dessus, on peut faire l'hypothèse que pour un certain rayon $r = R_0$ le déplacement peut être considéré nul. En déduire que : $u_r(r) = Cr \left(1 - \frac{R_0^2}{r^2}\right)$ (/1)

$$u_r(r) = \frac{D}{r} + Cr$$

$$u_r(r = R_0) = 0 \Rightarrow u_r(r = R_0) = \frac{D}{R_0} + CR_0 = 0 \Rightarrow D = -CR_0^2$$

$$\Rightarrow u_r(r) = \frac{-CR_0^2}{r} + Cr = C \left(r - \frac{R_0^2}{r} \right)$$

13. A partir de la question 7, décrire la démarche permettant de trouver la constante C (/1)

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} + \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} \end{pmatrix}$$

$$\frac{u_r}{r} = C \left(1 - \frac{R_0^2}{r^2} \right)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = C \left(1 + \frac{R_0^2}{r^2} \right)$$

$$\Rightarrow \sigma_{rr} = C \times (\lambda + 2\mu) \left(1 + \frac{R_0^2}{r^2} \right) + \lambda \left(1 - \frac{R_0^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_{rr}(r = R) = -p \Rightarrow C \times \left[(\lambda + 2\mu) \left(1 + \frac{R_0^2}{R^2} \right) + \lambda \left(1 - \frac{R_0^2}{R^2} \right) \right] = 2C \times \left[\lambda + \mu \left(1 + \frac{R_0^2}{R^2} \right) \right] = -p$$

$$\Rightarrow C = \frac{-p}{2 \left(\lambda + \mu \left(1 + \frac{R_0^2}{R^2} \right) \right)}$$

14. On s'intéresse désormais à $\sigma_{\theta\theta}$ uniquement (la figure ci-dessus montre que l'on peut négliger σ_{rr}). Montrer que $\sigma_{\theta\theta} = 2\lambda C$ pour le rayon $r = R_0$. (/1)

(suite au dos)

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} + \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\left. \frac{u_r}{r} \right|_{r=R_0} = C \left(1 - \frac{R_0^2}{R_0^2} \right) = 0$$

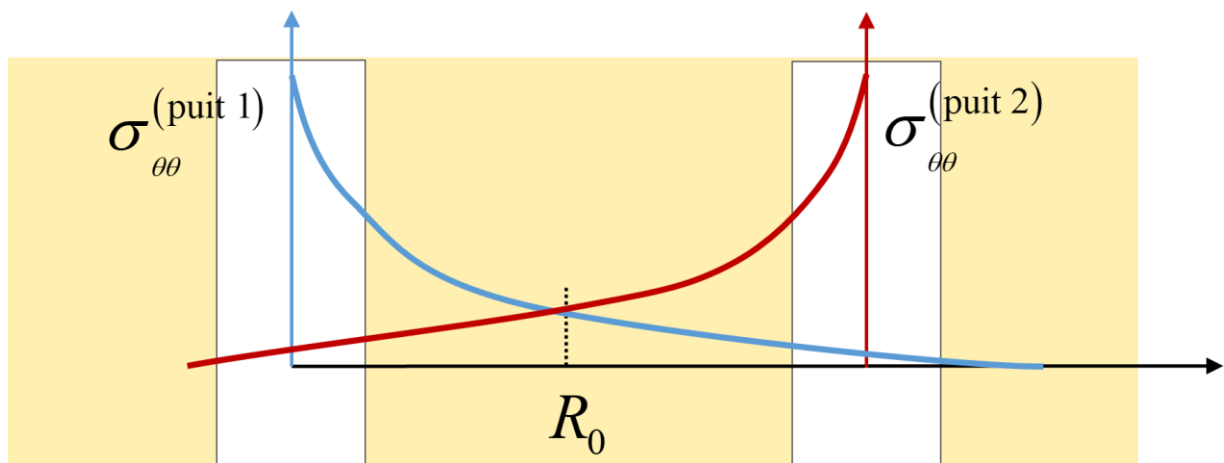
$$\left. \frac{\partial u_r}{\partial r} \right|_{r=R_0} = C \left(1 + \frac{R_0^2}{R_0^2} \right) = 2C$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r = R_0) = 2\lambda C$$

15. Que vaudra cette contrainte si un deuxième puit est creusé à une distance $D = 2R_0$ du premier puit ? Faire schéma explicatif. (/1)

Evidemment, on a $\sigma_{\theta\theta} \rightarrow 0$ quand $R_0 \rightarrow \infty$.

Si un deuxième puit est creusé, la contrainte sera également égale à $\sigma_{\theta\theta} = 2\lambda C$ à une distance $r = R_0$ de ce second puit, donc les contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ vont s'additionner de telle sorte qu'on aura $\sigma_{\theta\theta} = 4\lambda C$



Finalité

On peut donc maintenant juger de l'influence de la présence d'un premier puit sur les contraintes dans le sol, et juger de la distance à laquelle forer un deuxième puit pour ne pas que la contrainte cumulée dépasse la contrainte admissible par les roches qui constituent le sol.

Formulaire

Tenseur des déformations linéarisé : $\frac{1}{2}(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T)$

Tenseur taux de déformation : $\frac{1}{2}(\underline{\underline{grad}} \underline{v} + (\underline{\underline{grad}} \underline{v})^T)$

En coordonnées cylindriques (3D):

$$[\underline{\underline{Grad}} \underline{T}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_r}{\partial r} & \frac{1}{r}(\frac{\partial T_r}{\partial \theta} - T_\theta) & \frac{\partial T_r}{\partial z} \\ \frac{\partial T_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}(\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + T_r) & \frac{\partial T_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial T_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial T_z}{\partial \theta} & \frac{\partial T_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad [\underline{\underline{div}} \underline{T}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(T_{rr} - T_{\theta\theta}) + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(T_{r\theta} + T_{\theta r}) + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} T_{zr} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Equation d'équilibre : $\underline{\underline{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho(\underline{f}^m - \underline{a}) = \underline{0}$

Loi de Hooke : $\underline{\underline{\sigma}} = (\lambda \text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$

Comportement du fluide newtonien : $\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + 2\eta \underline{\underline{d}}$

Equation de Navier-Stokes : $\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right) = -\underline{\underline{grad}}(p) + \eta \Delta \underline{v} + \rho \underline{g}$