

Examen partiel de Thermodynamique
(Durée : 1 heure. Documents non autorisés. Calculatrice non autorisée.)

NOM : JEAN - CHRISTOPHE

PRENOM : PERRIN

Questions de cours (10 points)

- 1** Donner les hypothèses nécessaires à l'application des lois de Laplace à une transformation thermodynamique d'un système {gaz}. (1 point)

- gaz parfait
- adiabatique
- réversible

- 2** Donner l'expression du coefficient de compressibilité isotherme pour un système fluide quelconque. (1 point)

compressibilité isotherme $\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$

- 3** Donner l'expression du coefficient de compressibilité isotherme pour un gaz parfait. (1 point)

$$\chi_T = \frac{1}{P}$$

$\frac{33 \text{ mots}}{113} > 10$ après modération de la note (facteur 1,4 !)

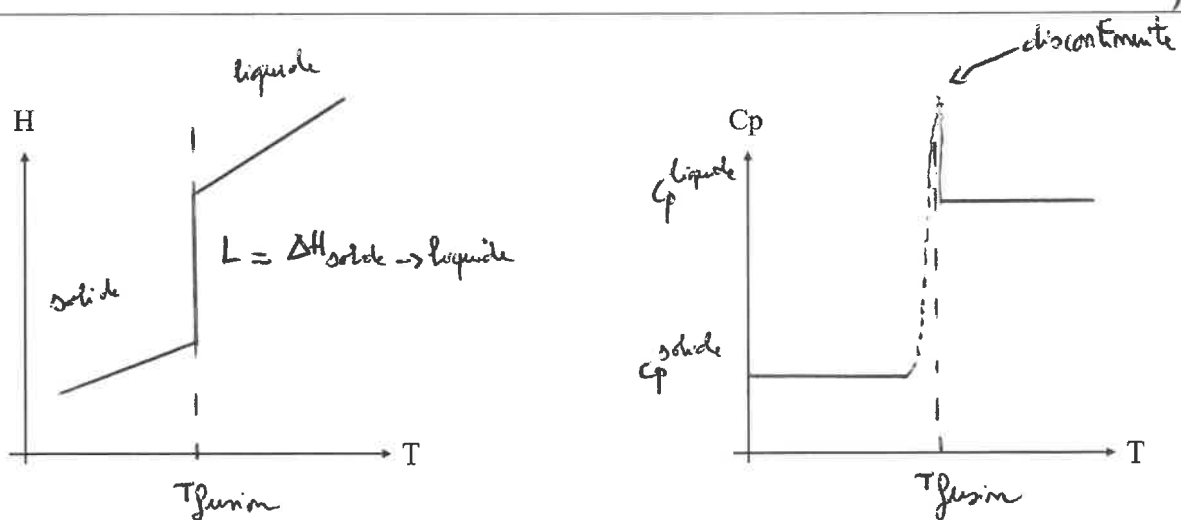
- 4 Donner l'expression du coefficient de dilatation volumique isobare pour un système fluide quelconque. (1 point)

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

- 5 Donner l'expression du coefficient de dilatation volumique isobare pour un gaz parfait. (1 point)

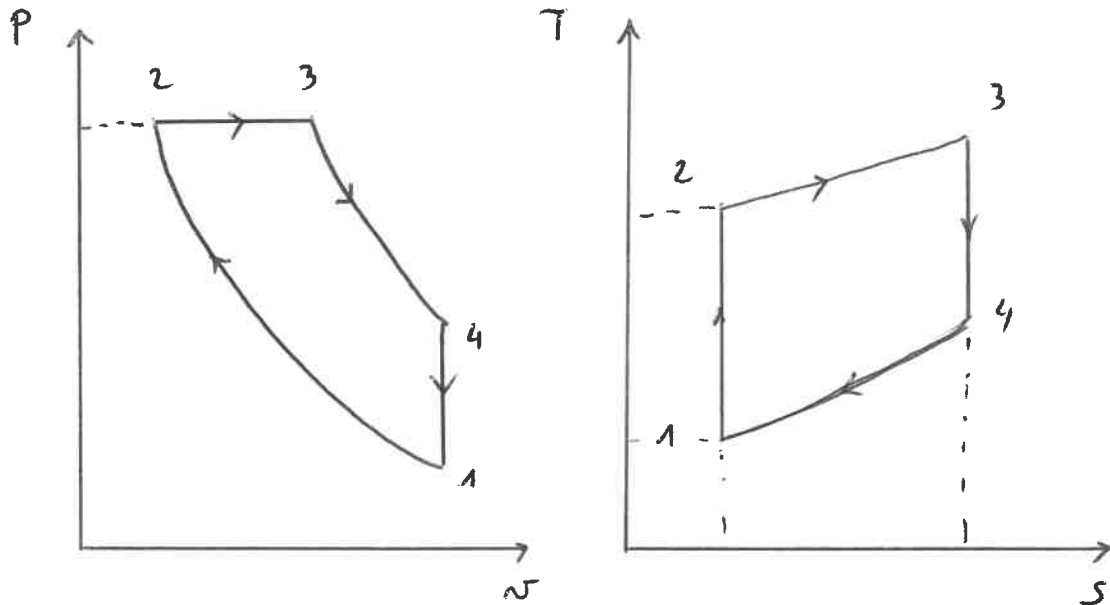
$$\alpha = \frac{1}{T}$$

- 6 Décrire, en s'aidant de graphiques, l'évolution de la fonction enthalpie H et de la capacité calorifique Cp en fonction de la température lors d'un changement d'état solide $\leftrightarrow$ liquide d'un corps pur (vous pouvez prendre l'exemple de l'eau) (2 points)

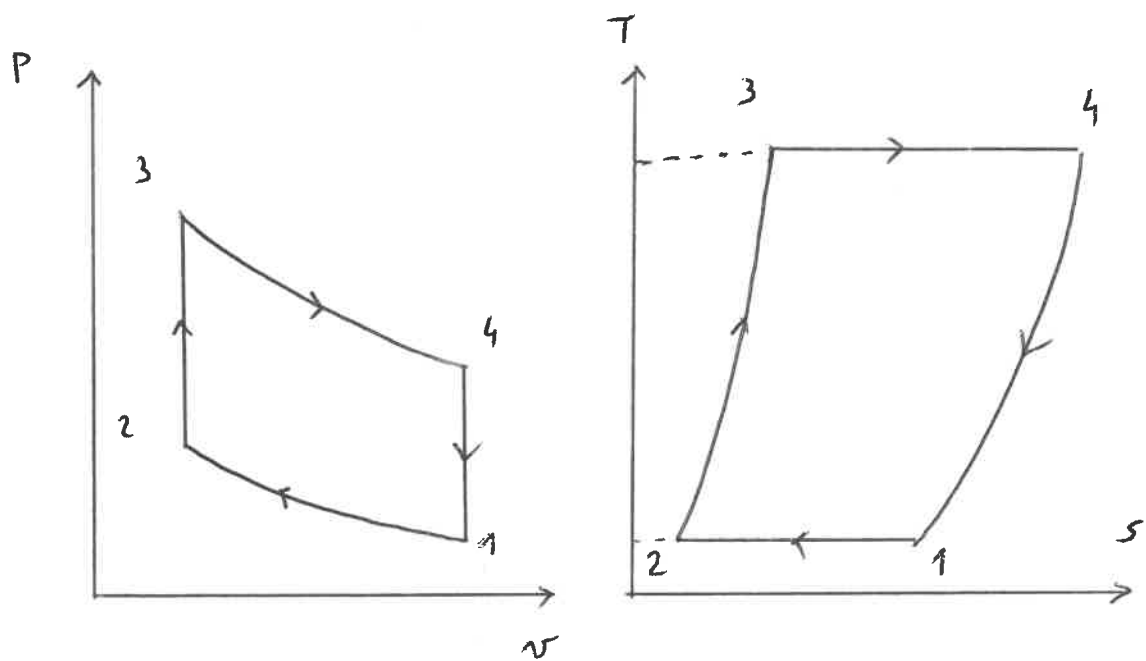


- 7 Schématiser les cycles des moteurs Diesel et Stirling sur les diagrammes (P, v) et (T, S). (3 points)

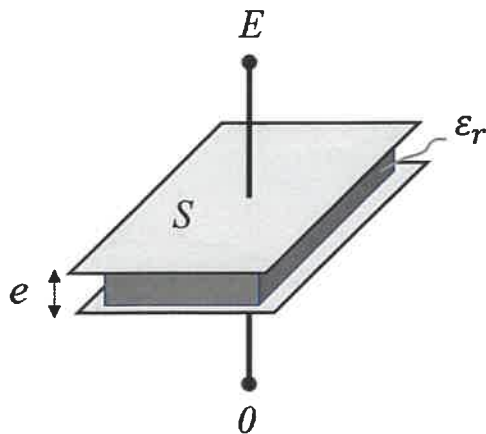
Diesel :



Stirling :



Exercice. Thermodynamique d'un condensateur (10 points - répondre sur une copie séparée)



Un condensateur plan est constitué de deux armatures de surface S , séparées d'une distance e , dont l'une (P) est portée au potentiel E et l'autre à la masse. Un diélectrique de permittivité électrique relative ϵ_r est introduit dans l'espace entre les deux armatures. La capacité du condensateur est $C = \epsilon_r C_0$, avec $C_0 = \epsilon_0 S/e$. ϵ_0 est la permittivité du vide.

Lorsque la charge élémentaire dq est amenée à l'armature (P) du condensateur, le travail électrique correspondant s'écrit $\delta W_e = Edq$.

- 1) Soit c la capacité calorifique massique isochore du diélectrique et ρ sa masse volumique. Dans la suite, on considère le système constitué du diélectrique, de volume constant, de sorte que l'on néglige le travail mécanique correspondant. On adopte les variables thermodynamiques la température T et le potentiel E , de sorte que la chaleur élémentaire reçue s'écrive :

$$\delta Q = KdT + l dE$$

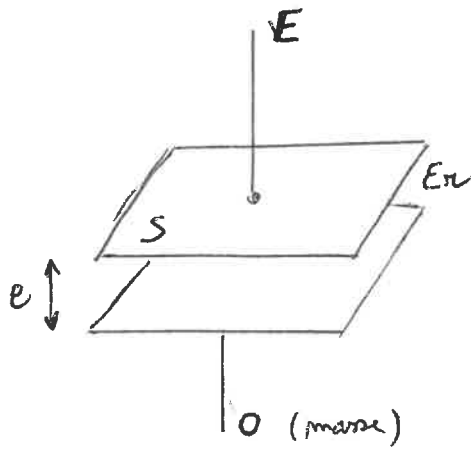
- a. Donner l'expression de K en fonction de ρ, c, e et S .
- b. Ecrire le premier principe de la thermodynamique, sous forme différentielle, lorsque la charge dq est apportée au condensateur, en même temps que la chaleur δQ .
- 2) La charge q portée par le condensateur peut s'exprimer par la relation : $q = \epsilon_r C_0 E$, où C_0 est considérée constante et ϵ_r une fonction de la température : $\epsilon_r = \epsilon_r(T)$.
 - a. La charge élémentaire pouvant se mettre sous la forme : $dq = \lambda dE + \mu dT$, exprimer les coefficients λ et μ en fonction de ϵ_r, C_0, E et $d\epsilon_r/dT$.
 - b. Montrer que le coefficient l s'écrit : $l = E C_0 T (d\epsilon_r/dT)$.
- 3) On s'intéresse à la charge isotherme du condensateur, à la température T_0 , le condensateur étant soumis à un potentiel électrique qui augmente de 0 à E .
 - a. Montrer que le travail électrique que reçoit le condensateur s'écrit $W_e = C E^2/2$.
 - b. En déduire la variation d'énergie interne ΔU en fonction de W_e, T_0, ϵ_r et $(d\epsilon_r/dT)$.
- 4) On s'intéresse maintenant à une transformation adiabatique réversible faisant passer la température de T_0 à T , tandis que le potentiel passe de 0 à $E \neq 0$. En supposant $(d\epsilon_r/dT)$ constant, donner l'expression de T en fonction de $T_0, E, \epsilon_0, c, \rho, e$ et $(d\epsilon_r/dT)$.

~~... (handwritten scribbles) ...~~

THERMODYNAMIQUE

D'UN CONDENSATEUR

1



diélectrique : ϵ_r, c, e

capacité $C = \epsilon_r C_0$; $C_0 = \epsilon_0 S / e$

* ϵ_0 = permittivité du vide

* ϵ_r = permittivité relative du diélectrique

$$\delta W_e = E dq \quad ; \quad \delta Q = K dT + l dE$$

1. [a] - K est le coefficient devant "dT". Il s'agit d'une capacité calorifique donc

Puisque c est la capacité calorifique molaire, alors $K = m \times c$

or, $m = \rho V = \rho S e$ d'où $\boxed{K = \rho c S e}$

[b]. 1^{er} principe sous forme différentielle $\Rightarrow dU = \delta W + \delta Q$

$\delta W = \delta W_e$ (pas de travail des forces de pression)

donc $\boxed{dU = K dT + l dE + E dq}$

[2] [a]. $q = \epsilon_r C_0 E$ avec $C_0 = \text{constante}$ et $\epsilon_r = \epsilon_r(T)$

on a $dq = \lambda dE + \mu dT$ donc $\lambda = \left(\frac{\partial q}{\partial E} \right)_T$ et $\mu = \left(\frac{\partial q}{\partial T} \right)_E$

$q = \epsilon_r C_0 E \rightarrow \left(\frac{\partial q}{\partial E} \right)_T = \boxed{\epsilon_r C_0 = \lambda}$ (car ϵ_r ne dépend pas de E et $C_0 = \text{cte}$)

$\rightarrow \left(\frac{\partial q}{\partial T} \right)_E = \boxed{C_0 E \frac{d\epsilon_r(T)}{dT} = \mu}$ (dérivée totale car ϵ_r ne dépend que de T)

[b]. D'après la définition de δQ , il s'écrit $l = \left(\frac{\partial Q}{\partial E} \right)_T$

on a $dU = K dT + l dE + E \lambda dE + E \mu dT$

$dU = (K + E \mu) dT + (l + E \lambda) dE$

dU est une différentielle totale exacte.

[2]

$$\text{dmc : } \left. \frac{\partial}{\partial T} (L + E\lambda) \right|_E = \left. \frac{\partial}{\partial E} (K + E\mu) \right|_T$$

$$\Leftrightarrow \left. \frac{\partial}{\partial T} (L + E \epsilon_n C_0) \right|_E = \left. \frac{\partial}{\partial E} (K + C_0 E^2 \frac{d\epsilon_n(T)}{dT}) \right|_T$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_E + E C_0 \frac{d\epsilon_n(T)}{dT} = \left(\frac{\partial K}{\partial E} \right)_T + 2 C_0 E \frac{d\epsilon_n(T)}{dT}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_E = \left(\frac{\partial K}{\partial E} \right)_T + C_0 E \frac{d\epsilon_n(T)}{dT} \quad (*)$$

dS est aussi une DTE. Elle s'écrit, pour une transformation réversible :

$$dS^{\text{rev.}} = \frac{\delta Q^{\text{rev.}}}{T} = \frac{K dT}{T} + \frac{L dE}{T}$$

$$\text{DTE} \Rightarrow \left. \frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{K}{T} \right) \right|_T = \left. \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{L}{T} \right) \right|_E$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T} \left(\frac{\partial K}{\partial E} \right)_T = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_E - \frac{L}{T^2} \Rightarrow \left(\frac{\partial K}{\partial E} \right)_T = \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_E - \frac{L}{T}$$

En identifiant cette dernière équation avec l'expression (*), on trouve finalement :

$$\boxed{L = C_0 E T \frac{d\epsilon_n(T)}{dT}}$$

[3] [a]. charge isotherme du condensateur (T_0) :

$$\begin{matrix} t_i \\ E=0 \\ T=T_0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} t_f \\ E=E \\ T=T_0 \end{matrix}$$

$$\delta W_e = E dq \quad q = \underbrace{\epsilon_n(T_0)}_{\text{constante}} C_0 E \Rightarrow \delta W_e = E \epsilon_n(T_0) C_0 dE$$

$$\Rightarrow \boxed{W_e = \int_0^E \epsilon_n(T_0) C_0 E dE = \epsilon_n(T_0) C_0 \int_0^E E dE = \epsilon_n(T_0) C_0 \left[\frac{E^2}{2} \right]_0^E = \frac{\epsilon_n(T_0) C_0 E^2}{2}}$$

$$[b]. \text{ à } T = T_0, \delta Q = l dE = C_0 T_0 \frac{d\epsilon_n(T)}{dT} E dE$$

[3]

$$dU = \cancel{k dT} + l dE + E dq = l dE + E \lambda dE + \cancel{E \mu dT}$$

$$= C_0 T_0 \frac{d\epsilon_n(T)}{dT} E dE + \epsilon_n C_0 E dE$$

$$\Delta U = \int_0^E \left(C_0 T_0 \frac{d\epsilon_n(T)}{dT} + \epsilon_n C_0 \right) E dE = \left(C_0 T_0 \frac{d\epsilon_n(T)}{dT} + \epsilon_n C_0 \right) \frac{E^2}{2}$$

$$\boxed{\Delta U = W_e \left(1 + \frac{T_0}{\epsilon_n} \frac{d\epsilon_n(T)}{dT} \right)}$$

[4] Adiabatique réversible.

$$\begin{pmatrix} T_0 \longrightarrow T \\ 0 \longrightarrow E \end{pmatrix}$$

La transformation est isentropique $\Rightarrow \Delta S = 0$

$$\text{on a } dS^{\text{rev.}} = \frac{\delta Q^{\text{rev.}}}{T} = K \frac{dT}{T} + \frac{l}{T} dE = K \frac{dT}{T} + C_0 E \frac{d\epsilon_n(T)}{dT} dE$$

$$\Rightarrow \Delta S = \int_{T_0}^T K \frac{dT}{T} + C_0 \frac{d\epsilon_n(T)}{dT} \int_0^E E dE = K \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + C_0 \frac{d\epsilon_n(T)}{dT} \frac{E^2}{2}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) = - \frac{C_0}{K} \frac{d\epsilon_n(T)}{dT} \frac{E^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = T_0 \exp \left(- \frac{C_0 E^2}{2 \rho c S e} \frac{d\epsilon_n(T)}{dT} \right)}$$

