

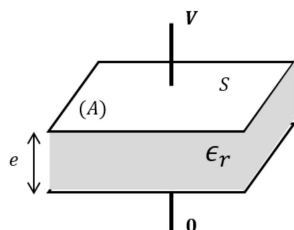
Thermodynamique d'un condensateur (8 points)

Un condensateur plan est constitué de deux armatures. L'une, (A) est portée au potentiel V , l'autre à la masse.

Ces armatures ont une surface en regard S et sont séparées par une distance e (voir figure).

Le milieu entre les armatures est rempli par un matériau diélectrique de permittivité électrique relative ϵ_r , de capacité thermique massique à volume constant c et de masse volumique ρ .

La capacité du condensateur est $C = \epsilon_r C_0$, avec $C_0 = \epsilon_0 S/e$ où ϵ_0 est la permittivité du vide.



Lorsque la charge élémentaire δq est apportée à l'armature (A), le travail électrique correspondant s'écrit: $\delta W_e = V \delta q$.

Hypothèses :

- on suppose que la variation de volume du matériau diélectrique est négligeable, de sorte que le travail correspond peut être également négligé.
- nous adoptons comme variables thermodynamiques la température T et le volume V . La chaleur élémentaire s'écrit alors $\delta Q = K dT + l dV$

1. Donner l'expression de K en fonction de ρ , c , e et S .

2. Ecrire le premier principe de la thermodynamique sous forme différentielle lorsque la charge δq est apportée au condensateur en même temps que la chaleur δQ .

La charge q portée par le condensateur peut être exprimée par $q = \epsilon_r C_0 V$, où C_0 sera considérée constante et ϵ_r est uniquement fonction de la température : $\epsilon_r = \epsilon_r(T)$.

3. La charge élémentaire pouvant être mise sous la forme $\delta q = \lambda dV + \mu dT$, exprimer les coefficients λ et μ en fonction de ϵ_r , C_0 , V et $\left(\frac{d\epsilon_r}{dT}\right)$.

4. En utilisant les propriétés des fonctions dU et dS , montrer que le coefficient l s'écrit $l = C_0 VT \left(\frac{d\epsilon_r}{dT} \right)$.

On s'intéresse à la charge **isotherme** du condensateur, à la température T_0 . Le condensateur est soumis à un potentiel électrique qui croît de 0 à V .

5. Montrer que le travail électrique que reçoit le condensateur s'écrit: $W_e = CV^2/2$.

6. En déduire que son énergie interne croît d'une quantité: $\Delta U = W_e \left[1 + \frac{T_0}{\epsilon_r} \left(\frac{d\epsilon_r}{dT} \right) \right]$

On s'intéresse maintenant à une transformation **isentropique** faisant passer la température de T_0 à T , tandis que le potentiel électrique passe de 0 à V .

7. En supposant que $(d\epsilon_r/dT)$ est constant, donner l'expression de T en fonction de T_0 , V , ϵ_0 , c , ρ , e et $(d\epsilon_r/dT)$.

8. Tracer l'évolution de la température T en fonction de la tension V de façon schématique sur un graphique. On considérera $(d\epsilon_r/dT) < 0$.

Thermodynamique d'un condensateur (corrigé)

1>

$$\delta Q = KdT + ldV$$

capacité calorifique totale: $C_v = \rho \times v \times e = \boxed{\rho Sec = K}$ où v est le volume

2>

$$\boxed{dU} = \delta W + \delta Q = \delta W_e + \delta Q = \boxed{V \cdot \delta q + \rho Sec \cdot dT + ldV}$$

3>

$$q = \epsilon_r C_0 V \text{ et } \epsilon_r = \epsilon_r(T)$$

$$\delta q = \lambda dV + \mu dT$$

$$\boxed{\lambda} = \left(\frac{\delta q}{\delta V} \right)_T = \boxed{\epsilon_r C_0}$$

$$\boxed{\mu} = \left(\frac{\delta q}{\delta T} \right)_V = \boxed{C_0 V \frac{d\epsilon_r}{dT}}$$

4>

$$\text{d'après 2>: } dU = V \left(\epsilon_r C_0 dV + C_0 V \frac{d\epsilon_r}{dT} \cdot dT \right) + \rho Sec \cdot dT + ldV$$

$$dU = (V\epsilon_r C_0 + l) dV + \left(C_0 V^2 \frac{d\epsilon_r}{dT} + \rho Sec \right) dT$$

$$dU \text{ est une DTE} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial T} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right]_V = \frac{\partial}{\partial V} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \right]_T$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial T} (V\epsilon_r C_0 + l) = \frac{\partial}{\partial V} \left(C_0 V^2 \frac{d\epsilon_r}{dT} + \rho Sec \right)$$

$$\Rightarrow VC_0 \frac{d\epsilon_r}{dT} + \frac{dl}{dT} = 2VC_0 \frac{d\epsilon_r}{dT} + \frac{\partial(\rho Sec)}{\partial V}$$

$$\Rightarrow \frac{dl}{dT} = VC_0 \frac{d\epsilon_r}{dT} + \frac{\partial}{\partial V} (\rho Sec) \quad (*)$$

d'autre part:

$$dS^{rev.} = \frac{\delta Q^{rev.}}{T} = \frac{\rho Sec}{T} dT + \frac{l}{T} dV$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial V} (\rho Sec) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{l}{T} \right) = \frac{-l}{T^2} + \frac{1}{T} \frac{dl}{dT} \quad (**)$$

$$(*) \text{ avec } (**) \Rightarrow \frac{dl}{dT} - VC_0 \frac{d\epsilon_r}{dT} = \frac{-l}{T} + \frac{dl}{dT}$$

$$\Rightarrow \frac{l}{T} = VC_0 \frac{d\epsilon_r}{dT}$$

$$\Rightarrow \boxed{l = TVC_0 \frac{d\epsilon_r}{dT}}$$

5>

$$T = T_0 = Cste$$

V varie de $V_i = 0$ à $V_f = V$

$$\boxed{W_e} = \int_0^V \delta W_e = \int_0^V V\epsilon_r C_0 dV = \epsilon_r C_0 \int_0^V V dV = \epsilon_r C_0 \frac{V^2}{2} = \boxed{C \frac{V^2}{2}}$$

6>

$$\Delta U = W_e + Q$$

$$\delta Q = KdT + l dV = l dV = C_0 V T_0 \left(\frac{d\epsilon_r}{dT} \right) dV$$

$$Q = \int_0^V C_0 T_0 \frac{d\epsilon_r}{dT} V dV = C_0 T_0 \frac{d\epsilon_r}{dT} \frac{V^2}{2} = T_0 \frac{d\epsilon_r}{dT} \frac{W_e}{\epsilon_r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta U} = W_e + \frac{T_0}{\epsilon_r} \frac{d\epsilon_r}{dT} W_e = \boxed{W_e \left(1 + \frac{T_0}{\epsilon_r} \frac{d\epsilon_r}{dT} \right)}$$

7>

$$T : T_0 \rightarrow T \text{ et } V : 0 \rightarrow V$$

$$\Delta S = 0 = \int_{T_0}^T \frac{\rho Sec}{T} dT + \int_0^V C_0 V \frac{d\epsilon_r}{dT} dV$$

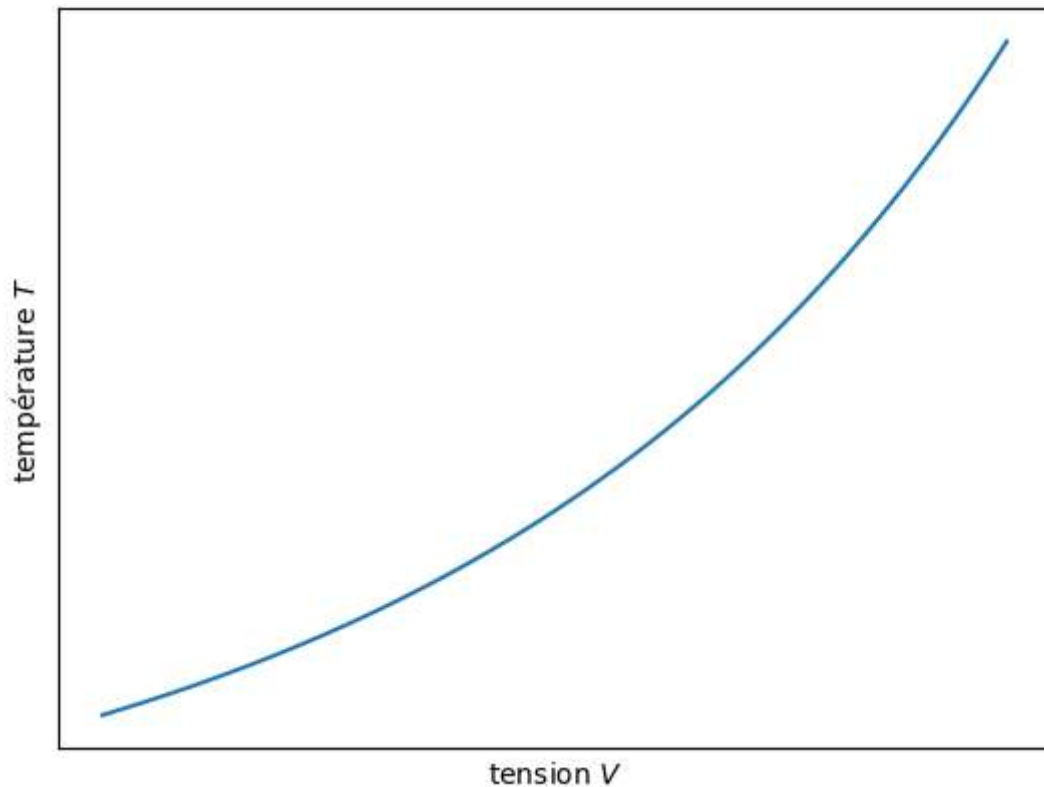
$$= \rho Sec \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + C_0 \frac{d\epsilon_r}{dT} \frac{V^2}{2}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) = -\frac{d\epsilon_r}{dT} \frac{V^2 \epsilon_0}{2\rho e^2 c}$$

$$\text{donc } T = T_0 \exp\left(-\frac{V^2 \epsilon_0}{2\rho e^2 c} \frac{d\epsilon_r}{dT}\right)$$

```
In [ ]: import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
T0 = 300
x = np.linspace(1,1.5,100)
plt.plot(x,T0*np.exp(x**2))
plt.xlabel("tension $V$")
plt.ylabel("température $T$ ")
#plt.axis('off')
plt.xticks([], [])
plt.yticks([], [])
```

Out[]: ([], [])



Bouilloire électrique (2 points)

Une bouilloire a une puissance électrique de $1000W$.

9. Quel temps faut-il pour chauffer un demi-litre d'eau de $20^\circ C$ à $85^\circ C$ à l'aide de cette bouilloire ?

On donne : $C_p^{eau} = 4.18 kJ.kg^{-1}.K^{-1}$

9>

un demi litre d'eau $\rightarrow 500g = 0.5kg$

On considère que le système $\{eau\}$ est isolé thermiquement et que la transformation se fait à $P = cste$.

Comme on considère que C_p^{eau} ne dépend pas de la température, alors la chaleur reçue par le système s'écrit: $\delta Q = mC_p^{eau}dT$, soit $Q = mC_p^{eau}\Delta T$ avec $\Delta T = 65^\circ$.

La puissance de la bouilloire est de $P = 1000W$, soit $1000J/s$. Le temps mis pour chauffer l'eau est donc $\Delta T = Q/P$

```
In [ ]: P=1000
Q = 0.5*4180*65
print("Q= ~ {:.0f} J ".format(Q))

delta_T = Q/P
print("Delta T = ~ {:.0f} s = ~ {:.1f} min".format(delta_T, delta_T/60))

Q= ~ 135850 J
Delta T = ~ 136 s = ~ 2.3 min
```

Questions de cours (vrai/faux) (10 points)

Les réponses aux questions doivent être rédigées et elles doivent être justifiées.

- réponse **vrai/faux** correcte → 0.25 point
- **justification** correcte → 0.75 point
- **pas de justification** → 0 point

10. La thermodynamique classique est une théorie microscopique.

FAUX. La thermodynamique classique est une théorie macroscopique. Le système doit comporter un grand nombre $\sim 10^{23}$ particules.

11. Un système thermodynamique fermé peut échanger de la chaleur avec son environnement.

VRAI. C'est dans le cas d'un système ISOLE THERMIQUEMENT (ADIABATIQUE) que le système n'échange pas de chaleur avec le milieu extérieur. Dans le cas d'un système ISOLÉ, le système n'échange ni matière, ni chaleur, ni travail. Dans le cas d'un système FERMÉ, le système n'échange pas de matière.

12. Il n'est pas nécessaire de définir le chemin de transformation pour calculer le travail échangé par un système lors d'une transformation réversible.

FAUX. Le calcul du travail nécessite de connaître (et donc de définir au préalable) le chemin de transformation. Le résultat calculé dépend de ce chemin. δQ et δW ne sont pas des différentielles totales exactes.

13. L'entropie échangée par un système avec son environnement lors d'une transformation peut être positive.

VRAI. Le signe de l'entropie d'échange dépend de celui de Q .

14. La chaleur latente de changement de phase est définie négative.

FAUX. Elle est définie positive.

15. La capacité calorifique d'un fluide est constante.

FAUX. Elle dépend des autres variables, notamment de la température.

16. Le coefficient de performance d'une pompe à chaleur peut être supérieur à 1.

VRAI. Il est même toujours supérieur à 1.

17. Une machine thermodynamique monotherme peut fournir du travail $W < 0$.

FAUX. Une machine thermodynamique monotherme ne peut être que réceptrice, donc $W > 0$.

18. Un moteur Stirling peut être alimenté par l'énergie solaire.

VRAI. C'est un moteur à combustion externe. La source chaude est extérieure au moteur, donc ce peut être de l'énergie solaire.

19. Un moteur Diesel tournant à $1500\text{tr}/\text{min}$ effectue 1500 cycles thermodynamiques par minute.

FAUX. Lorsque le système air+combustible effectue un cycle thermodynamique, le moteur fait deux tours. Donc si le moteur tourne à 1500 tours/minutes, le système effectue 750 cycles/minutes.

20. Un réfrigérateur est une machine ditherme motrice.

FAUX. Un réfrigérateur est une machine ditherme receptrice.
