

Proportionnalité

Notion de proportionnalité

La proportionnalité est une situation de dépendance linéaire entre grandeurs. Deux ensembles de grandeurs mesurables A et B sont dites proportionnelles lorsqu'il existe un nombre λ tel que, à toute valeur a de A , corresponde une valeur b de B vérifiant l'égalité $b = \lambda \times a$. Le nombre λ est alors appelé coefficient de proportionnalité. Par exemple, pour passer d'un prix en euros à un prix en francs, on utilise le coefficient de proportionnalité 6.55957.

Attention à bien comprendre ce que signifie dépendance linéaire : il peut y avoir bien des situations différentes de dépendance entre deux grandeurs, et beaucoup satisfont une propriété de croissance (lorsque la valeur de la grandeur A augmente, la valeur de la grandeur B augmente également, et réciproquement), mais il est tout à fait possible que cela ne corresponde pas à une situation de proportionnalité.

On peut illustrer la proportionnalité entre deux grandeurs à l'aide d'un tableau de proportionnalité. Ce tableau est constitué de deux lignes (ou deux colonnes). Les valeurs de A figurent dans la première ligne ; les valeurs correspondantes de B (qui sont liées par la relation de dépendance linéaire) figurent dans la deuxième ligne. Pour un souci de lisibilité, on range assez souvent les valeurs dans l'ordre croissant.

Distance parcourue (en km)	1	2	3	4	6	8	12
Temps (en mn)	5	10	15	20	30	40	60

Un ensemble de valeurs hors-contexte ne peut permettre de déterminer si un modèle de proportionnalité s'applique à une situation. Dans l'exemple suivant, le tableau A est un tableau de proportionnalité, mais on ne peut pas affirmer qu'il correspond à une situation de proportionnalité. En revanche, le tableau B ne correspond pas à une situation de proportionnalité puisque ce n'est pas un tableau de proportionnalité.

1	2
4	8

tableau A

1	2
4	9

tableau B

La modélisation d'une situation physique nécessite de prendre en compte l'ordre de grandeur des valeurs expérimentales : il est pertinent de prendre un modèle de proportionnalité entre l'allongement d'un ressort et la masse qui y est suspendue lorsque l'on utilise des masses de l'ordre de quelques centaines de grammes, mais le modèle n'a plus lieu d'être si l'on suspend une masse de plusieurs tonnes. La nature des données demande aussi à être prise en considération : si 3 billes rouges déterminent la même valeur que 5 billes bleues, alors il n'est pas possible d'exprimer un nombre entier de billes rouges correspondant à 8 billes bleues.

Pourcentages

Lorsque b est une quantité, on désigne par $t\%$ de b ("t pourcents de b"), la quantité $b \times \frac{t}{100}$.

Augmenter la quantité b de $t\%$ revient à lui ajouter $b \times \frac{t}{100}$; cette quantité devient après transformation $b + b \times \frac{t}{100} = b \times (1 + \frac{t}{100})$. Diminuer la quantité b de $t\%$ revient à soustraire $b \times \frac{t}{100}$; la quantité devient après transformation $b - b \times \frac{t}{100} = b \times (1 - \frac{t}{100})$.

Le taux d'évolution d'une transformation s'obtient en calculant le pourcentage de variation d'une quantité. Si une quantité vaut initialement b et vaut b' après transformation, alors son taux de variation est de $t\%$ avec $\frac{t}{100} = \frac{b' - b}{b}$. Si t est positif, la variation est une augmentation ; si t est négatif, il s'agit d'une diminution.

Fonction, fonction numérique

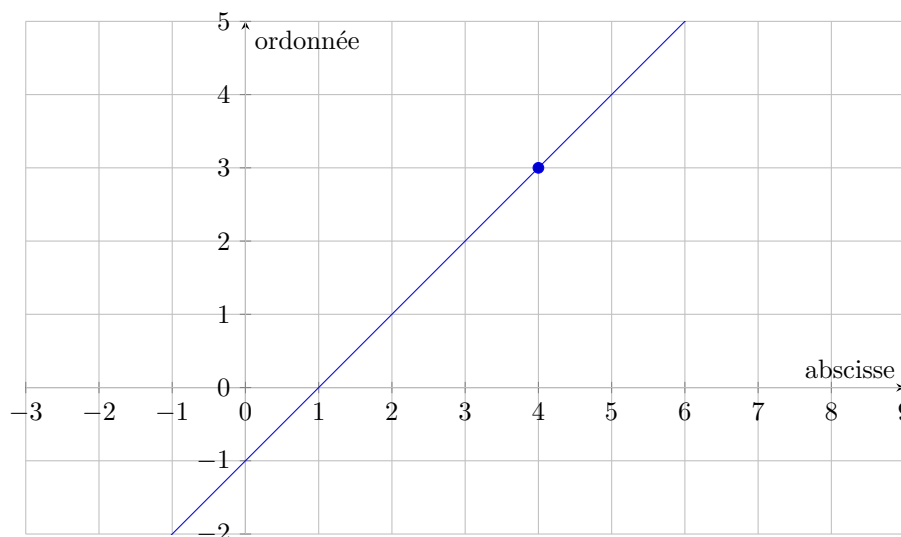
Une fonction d'un ensemble E à valeurs dans un ensemble F est une mise en relation entre les éléments de l'ensemble E et ceux de l'ensemble F , de sorte qu'à chaque élément x de E corresponde un élément y de F . On note cette correspondance sous la forme $f(x) = y$. On dit alors que y est l'image de x par la fonction f , et que x est un antécédent de y par la fonction f .

En toute généralité, les ensembles E et F sont choisis de sorte que l'image d'un élément de E existe et soit unique, mais attention, ce n'est pas le cas pour l'antécédent d'un élément de F (plusieurs valeurs possibles ou aucune).

Une fonction est dite numérique lorsqu'elle est définie sur l'ensemble des nombres réels (ou un sous-ensemble) et à valeurs dans l'ensemble des nombres réels.

Représentation graphique

Une fonction numérique admet une représentation graphique dans un repère orthonormé comme l'ensemble des points d'abscisse x et d'ordonnée $f(x)$. Lorsque le graphe est continu, on parle de courbe de la fonction f . Pour une abscisse x donnée, il existe une unique ordonnée y de sorte que le point de coordonnées $(x; y)$ appartienne au graphe de f .



On reconnaît sur cet exemple la représentation graphique d'une droite, qui ne passe pas par l'origine (le point d'abscisse 0 et d'ordonnée 0). Le point (4;3) appartient à cette droite : son abscisse est 4 et son ordonnée est 3. Si ce graphe est la représentation d'une fonction f , on peut dire que l'image de 4 par la fonction f est 3, et que 4 est un antécédent (éventuellement unique) de 3 par la fonction f .

Attention, pour toute fonction numérique, un nombre possède toujours une unique image, mais si la fonction n'est pas une fonction affine, il est possible qu'un nombre possède plusieurs antécédents, ou aucun.

Une fonction affine est une fonction numérique f telle que $f(x) = ax + b$ pour toute valeur de x . La quantité a est appelée coefficient directeur (ou taux d'accroissement) de la fonction f et la quantité b ordonnée à l'origine de la fonction f ; c'est l'ordonnée du point d'intersection entre l'axe des ordonnées et le graphe de la fonction f .

Une fonction linéaire est une fonction affine pour laquelle $b = 0$. Les fonctions linéaires sont exactement les fonctions qui décrivent les relations de proportionnalité entre deux grandeurs.

Pour les fonctions affines (et donc linéaires), il y a existence et unicité de l'antécédent d'un nombre réel.

Une fonction est affine si et seulement si les points de son graphe sont alignés ; une fonction est linéaire si et seulement si les points de son graphe sont alignés avec l'origine.