

Enseignement de la proportionnalité

La proportionnalité se place dans le champ des problèmes de structure multiplicative. En cela, on peut inclure son étude dans le domaine plus large des opérations et calculs.

On qualifie un problème de recherche de quatrième proportionnelle lorsque l'on dispose d'un tableau à deux lignes et deux colonnes dans lequel, parmi 4 quantités a, b, c et d, trois d'entre elles sont connues et la quatrième doit être calculée, de sorte que le tableau soit un tableau de proportionnalité.

a	b
c	d

Propriétés des fonctions linéaires

Les propriétés qui permettent de reconnaître ou compléter un tableau de proportionnalité sont :

- présence d'une "colonne des zéros" (ou ligne) : si un tableau de proportionnalité contient la valeur 0, alors l'intégralité de la colonne (ou ligne) est constituée de zéros,
- linéarité additive : $f(x+x') = f(x) + f(x')$ (par exemple, si $f(3) = 6$ et $f(4) = 8$, alors $f(3+4) = 6+8$),
- linéarité multiplicative : $f(xx') = xf(x') = x'f(x)$ (par exemple, si $f(3) = 7$, alors $f(5 \times 3) = 5 \times f(3)$),
- retour à l'unité : $f(x) = xf(1)$,
- rapport constant : $\frac{f(x)}{x} = f(1)$,
- produit en croix : si $f(x) = y$ et $f(x') = y'$, alors $x \times y' = x' \times y$; si $y' \neq 0$ alors $x = \frac{x'y}{y'}$,
- proportionnalité des écarts : $f(x') - f(x) = a(x' - x)$, qui est plus généralement vérifiée pour toute fonction affine (par exemple, $f(12) - f(10) = f(2) - f(0)$ est égal au double de $f(8) - f(7) = f(1) - f(0)$),

durée (en minutes)	5	10	60
longueur (en kilomètres)	25	50	300

On peut mettre en évidence deux types de rapports dans un tableau de proportionnalité : un rapport interne et un rapport externe. Un rapport interne est l'expression d'un facteur multiplicatif qui lie les valeurs d'une même grandeur (partie-tout), tandis que le rapport externe est l'expression du facteur qui permet de lier les deux grandeurs. Dans l'exemple ci-dessus, plusieurs valeurs de rapport interne apparaissent : 2 ; 6 et 12. Par contre, il y a un seul rapport externe qui est égal à 5. Noter que l'on peut interpréter physiquement le rapport externe en fonction des unités de mesure des grandeurs liées (ici, des kilomètres par minute), tandis qu'un rapport interne est un nombre sans dimension.

Le travail sur la notion de proportionnalité doit faire apparaître la diversité des procédures possibles. Son enseignement doit permettre la manipulation de grandeurs avec leurs unités, ce qui peut être réalisé à travers l'expression de procédures dans la langue courante, notamment avec la "règle du double" (par exemple, "si j'ai 3 bonbons avec 2 euros, j'aurais le double de bonbons avec le double d'euros").

Il est important de ne pas mettre en jeu trop tôt des procédures de résolution experte (produit en croix, règle de trois) auprès d'élèves qui ne mettraient pas de sens derrière le calcul ainsi mené. C'est en particulier le cas avec le produit en croix qui est enseigné au cycle 4 : dans l'exemple suivant, le calcul du produit en croix $\frac{33 \text{ (mètres)} \times 35 \text{ (secondes)}}{21 \text{ (secondes)}}$ permet bien d'obtenir la donnée manquante, mais le numérateur ne correspond pas à une grandeur sensible (multiplication d'une longueur par une durée).

durée (en secondes)	21	35
longueur (en mètres)	33	?

La maîtrise de la notion de proportionnalité répond au principe de négation, ce qui signifie que les élèves doivent pouvoir identifier qu'une situation n'est pas modélisable par l'usage de la proportionnalité : si, pour faire un gâteau pour 4 personnes, il me faut 200 grammes de farine et que le gâteau doit cuire 30 minutes à 200 degrés, et si je veux réaliser un gâteau pour 8 personnes, j'aurais besoin de deux fois plus de farine, mais je ne dois pas doubler le temps de cuisson ni la température.

Mise en situation

On trouve des situations de proportionnalité dans les cadres suivants :

- des problèmes de partage équitable,
- des problèmes de nature physique (par exemple le calcul d'une distance en fonction du temps et d'une distance ou d'une masse en fonction d'une densité et d'un volume),
- des problèmes de changement d'échelle sur un plan,
- certaines configurations géométriques (Thalès ; triangles semblables),
- des problèmes de variation de quantité (pourcentages : calcul d'un taux de variation, de la valeur d'une quantité finale ou initiale, etc.),
- des représentations schématisées de partitions : diagrammes circulaires, représentations en bâtons, etc.

La notion de proportionnalité apparaît également dans des situations où l'enjeu n'est pas le calcul exact mais la notion d'estimation (approximation, encadrement). On peut citer par exemple : estimer l'épaisseur d'une feuille de papier connaissant l'épaisseur d'une ramette, la masse d'un grain de riz à partir de la donnée d'un sac de 1 kg de riz, le nombre de gouttes d'eau dans une bouteille de 1 litre, etc.

Le travail sur la notion de proportionnalité peut se faire en lien avec d'autres champs disciplinaires ou des éléments de culture générale, notamment en astronomie (distances entre corps célestes, durées que met la lumière pour parcourir des distances) ou en histoire (apparition de la vie sur Terre, de l'homme ; première approche des ères).

Erreurs fréquentes

Les principales difficultés auxquelles sont confrontés les élèves sont :

- mauvaise compréhension mathématique de la notion de proportionnalité, en particulier utilisation d'un modèle additif au lieu du modèle multiplicatif,
- application d'un modèle multiplicatif inadapté,
- non-reconnaissance de mots induisant une situation de proportionnalité (par exemple le mot "chaque" ; la difficulté étant plus généralement caractéristique des situations de structure multiplicative),
- mauvaise interprétation d'informations représentées graphiquement, ou mauvaise représentation de la situation,
- erreur dans le traitement des calculs, notamment lorsque ceux-ci mobilisent des quantités qui ne sont pas entières.