

# Mécanique des Fluides Numérique

École Nationale Supérieure des Mines de Nancy  
Université de Lorraine

Année universitaire 2025–2026

*Responsables du cours :*  
Thibault QUATRAVAUX

D'après le polycopié *Mécanique des Fluides Numériques* de J.P Bellot



# Table des matières

|          |                                                                                             |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Rappels et préliminaires</b>                                                             | <b>1</b>  |
| 1.1      | La notion de bilan - Transports par diffusion et convection . . . . .                       | 1         |
| 1.1.1    | Bilan global et bilan différentiel . . . . .                                                | 1         |
| 1.1.2    | Régime permanent et régime transitoire . . . . .                                            | 2         |
| 1.1.3    | Le transport diffusif - Lois phénoménologiques de la diffusion . . . . .                    | 3         |
| 1.1.4    | Le transport convectif . . . . .                                                            | 4         |
| 1.2      | L'équation de transport convecto-diffusif . . . . .                                         | 4         |
| 1.2.1    | L'équation générale . . . . .                                                               | 5         |
| 1.2.2    | Cas particuliers de l'équation générale . . . . .                                           | 7         |
| 1.3      | Conditions aux limites . . . . .                                                            | 9         |
| 1.3.1    | Les trois sortes de conditions aux limites . . . . .                                        | 9         |
| 1.3.2    | Quelques considérations mathématiques sur les c.l. . . . .                                  | 11        |
| <b>2</b> | <b>Équations de Navier–Stokes : variables secondaires</b>                                   | <b>13</b> |
| 2.1      | Introduction . . . . .                                                                      | 13        |
| 2.2      | Particularités de la résolution numérique des équations de Navier–Stokes . . . . .          | 14        |
| 2.3      | Variables primitives et variables secondaires . . . . .                                     | 14        |
| 2.4      | Équation de transport de la vorticité . . . . .                                             | 15        |
| 2.5      | Méthode $\omega-\psi$ . . . . .                                                             | 16        |
| 2.6      | Conditions aux limites . . . . .                                                            | 18        |
| 2.6.1    | Conditions aux limites pour la fonction courant . . . . .                                   | 18        |
| 2.6.2    | Conditions aux limites pour la vorticité . . . . .                                          | 19        |
| 2.7      | Divers . . . . .                                                                            | 20        |
| 2.7.1    | Signification des iso- $\psi$ . . . . .                                                     | 20        |
| 2.7.2    | Calcul de la pression . . . . .                                                             | 20        |
| 2.7.3    | Coordonnées non cartésiennes . . . . .                                                      | 20        |
| 2.8      | Avantages et inconvénients principaux de la formulation $\omega-\psi$ . . . . .             | 20        |
| <b>3</b> | <b>Calcul du champ de vitesse en variables primitives</b>                                   | <b>23</b> |
| 3.1      | Nécessité d'une procédure particulière . . . . .                                            | 23        |
| 3.2      | Problèmes liés à la discrétisation de la conservation de la quantité de mouvement . . . . . | 24        |
| 3.3      | Problèmes liés à la discrétisation de la conservation de la masse . . . . .                 | 25        |
| 3.4      | Une solution : les maillages décalés . . . . .                                              | 26        |
| 3.5      | Discrétisation de la conservation de la quantité de mouvement . . . . .                     | 27        |
| 3.6      | Corrections de pression et corrections de vitesse . . . . .                                 | 28        |
| 3.7      | De la conservation de la masse à l'équation de correction de pression . . . . .             | 28        |
| 3.8      | Algorithme SIMPLE . . . . .                                                                 | 29        |
| <b>4</b> | <b>Turbulence</b>                                                                           |           |
|          | Modélisation et simulation                                                                  | <b>31</b> |

|        |                                                                                |    |
|--------|--------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.1    | Mise en évidence de la turbulence . . . . .                                    | 31 |
| 4.2    | Caractérisation et description du mouvement turbulent . . . . .                | 32 |
| 4.2.1  | Caractère aléatoire . . . . .                                                  | 33 |
| 4.2.2  | Propriété de transport . . . . .                                               | 33 |
| 4.2.3  | Caractère rotationnel . . . . .                                                | 33 |
| 4.2.4  | Caractère dissipatif - Cascade d'énergie . . . . .                             | 34 |
| 4.3    | Condition d'existence des régimes laminaire et turbulent . . . . .             | 37 |
| 4.4    | Approche déterministe et approche statistique . . . . .                        | 38 |
| 4.5    | Analyse spectrale . . . . .                                                    | 39 |
| 4.5.1  | Fluctuations de la vitesse dans le temps . . . . .                             | 39 |
| 4.5.2  | Fluctuations de la vitesse dans l'espace - Échelle de Taylor . . . . .         | 40 |
| 4.6    | Moyennes statistiques des équations de transport . . . . .                     | 41 |
| 4.6.1  | Équation de continuité . . . . .                                               | 42 |
| 4.6.2  | Équations de Navier-Stokes . . . . .                                           | 42 |
| 4.6.3  | Équation de transport d'un scalaire . . . . .                                  | 43 |
| 4.7    | Notion de viscosité turbulente . . . . .                                       | 43 |
| 4.8    | Théorie de longueur de mélange de Prandtl. Profil universel des vitesses . . . | 44 |
| 4.8.1  | Théorie de Prandtl . . . . .                                                   | 44 |
| 4.8.2  | Profil logarithmique des vitesses . . . . .                                    | 45 |
| 4.9    | Énergie cinétique turbulente. Modèle de Kolmogorov . . . . .                   | 46 |
| 4.10   | Le modèle $k-\varepsilon$ . . . . .                                            | 48 |
| 4.11   | Conditions aux limites . . . . .                                               | 49 |
| 4.11.1 | Fonctions de paroi . . . . .                                                   | 49 |
| 4.11.2 | Double couches limites . . . . .                                               | 50 |

# Chapitre 1

## Rappels et préliminaires

### 1.1 La notion de bilan - Transports par diffusion et convection

Les lois de conservation de la matière, de l'énergie, et de la quantité de mouvement correspondent à trois grandes lois de la physique classique :

- la loi de Lavoisier,
- le premier principe de la thermodynamique,
- la “loi fondamentale de la dynamique” de Newton.

Trois grandeurs conservatives, ou extensités, sont ainsi définies. D'autres peuvent l'être, comme la quantité d'électricité par exemple. Dans tous ces cas, l'écriture de bilans est alors permise.

#### 1.1.1 Bilan global et bilan différentiel

La notion de bilan d'une extensité (masse ou nombre de moles d'une espèce chimique, enthalpie, composante selon une direction  $x$  quelconque de la quantité de mouvement) est tout à fait intuitive ; un bilan s'écrit toujours :

- entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$ ,
- dans un volume de référence  $V$ ,

De la manière suivante :

$$\boxed{\text{entrée} + \text{création} = \text{sortie} + \text{accumulation}}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
& \text{quantité de } \Phi \text{ qui rentre dans } V \text{ par une surface entre } t_1 \text{ et } t_2 \\
& \quad + \\
& \text{quantité de } \Phi \text{ produite à l'intérieur de } V \text{ entre } t_1 \text{ et } t_2 \\
& \quad = \\
& \text{quantité de } \Phi \text{ qui sort de } V \text{ par une surface entre } t_1 \text{ et } t_2 \\
& \quad + \\
& \text{quantité de } \Phi \text{ qui s'accumule à l'intérieur de } V \text{ entre } t_1 \text{ et } t_2
\end{aligned}$$

Les premier et troisième termes correspondent à des transports d'extensité à travers des surfaces. Les second et quatrième termes sont généralement de nature volumique.

La distinction entre bilan global et bilan différentiel est directement liée à la taille du volume dans lequel est effectué le bilan. Si ce volume est de dimensions finies, on parlera de bilan global. Si l'une au moins des dimensions du volume est infinitésimale, on écrira un bilan différentiel. Dans la pratique, on choisit le plus souvent (ce n'est en aucun cas obligatoire !!) un volume qui puisse être considéré comme homogène (notion de réacteur parfaitement agité) du point de vue de l'extensité qu'on étudie. De ce fait, l'écriture de bilans globaux semble offrir peu d'intérêt pour une étude fine des phénomènes de transport. Par contre, les bilans différentiels, qui conduisent à des équations aux dérivées partielles, sont abondamment utilisés. Nous verrons toutefois que la méthode des volumes finis, qui est exposée dans ce cours, fait largement appel à la notion de bilan global.

Par ailleurs, tous les bilans que nous écrirons dans le cadre de ce cours seront différentiels du point de vue du temps, c'est-à-dire que les instants  $t_1$  et  $t_2$  sont infiniment voisins et séparés par un intervalle de temps infinitésimal  $dt$ .

### 1.1.2 Régime permanent et régime transitoire

Lorsqu'on explicite les termes du bilan pour le cas particulier que l'on souhaite traiter (quelle extensité?, quel volume?), deux cas de figure peuvent a priori se présenter :

- Toutes les variables mises en jeu sont indépendantes du temps. En particulier, il n'y a pas d'accumulation d'extensité. On parle alors de régime permanent ou stationnaire (dans le cadre de ce cours, ces deux termes seront considérés comme synonymes).
- Certaines grandeurs sont susceptibles de varier en fonction du temps. Le régime est dit alors transitoire, évolutif, ou instationnaire. Nous retiendrons que dans la grande majorité des cas, ce régime est caractérisé par la présence effective d'un terme d'accumulation.

Si le régime permanent est assez rare dans la réalité, on peut par contre souvent poser l'hypothèse de régime quasi-permanent (ou quasi-stationnaire) lorsque les effets transitoires sont négligeables. Le choix de la nature du régime est une question très importante, qui se rencontre fréquemment lorsqu'on veut élaborer un modèle mathématique.

Un même système peut parfaitement se comporter de manière différente vis-à-vis d'extensités différentes. Ainsi, par exemple :

Si, dans une conduite cylindrique parcourue par un écoulement laminaire établi (régime permanent du point de vue du transport de quantité de mouvement), on injecte à l'instant

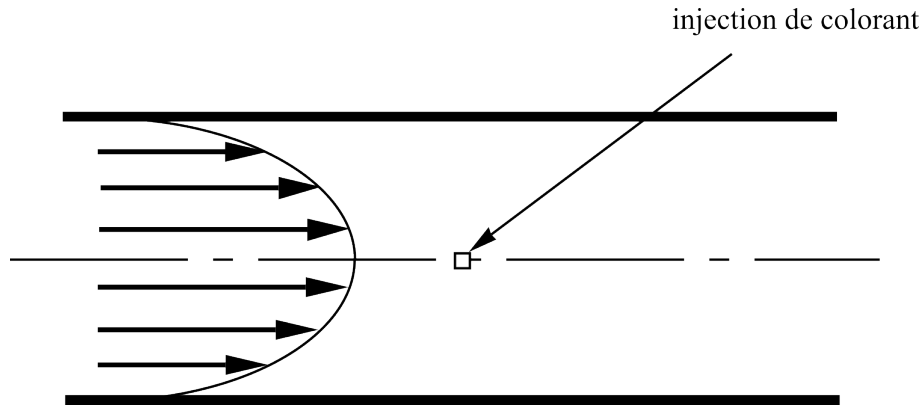


Figure 1.1 – Régime permanent ou régime transitoire?

$t = 0$  une quantité déterminée de matière colorante à un endroit précis, la détermination au cours du temps de la carte de concentration en colorant dans le système s'effectuera à l'aide d'un bilan de matière en régime transitoire.

### 1.1.3 Le transport diffusif - Lois phénoménologiques de la diffusion

Les trois lois phénoménologiques de la diffusion (loi de FICK pour la diffusion chimique, loi de FOURIER pour la diffusion thermique, loi de NEWTON pour le frottement visqueux), auxquelles on peut ajouter la loi d'OHM pour le courant électrique et la loi de DARCY pour l'écoulement dans un milieu poreux, peuvent se mettre sous la forme :

$$\vec{\phi} = -\lambda \nabla V \quad (1.1)$$

où

- $\vec{\phi}$  est la densité de flux diffusif de l'extensité  $\Phi$ ,
- $V$  le potentiel dont le gradient provoque la diffusion de l'extensité  $\Phi$ ,
- $\lambda$  la conductivité de ce transport.

Plus  $\lambda$  est grand (c'est-à-dire plus son inverse, la résistivité, est faible), moins le milieu oppose de résistance au transport de  $\Phi$ .

En fait, l'équation (I-1) est déjà un cas particulier. Tout d'abord, elle ne tient aucun compte du transport diffusif d'une extensité (par exemple, la matière) sous l'action de gradients de potentiels divers (par exemple, la température : effet Soret). Une écriture générale nécessiterait l'emploi de l'ensemble des coefficients phénoménologiques d'Onsager. Ensuite, le transport diffusif de quantité de mouvement ne peut s'exprimer, sous une forme aussi simple que (I-1), que dans le cas d'un écoulement monodirectionnel ou de celui d'un fluide newtonien, incompressible, et à viscosité constante. Enfin, la conductivité  $\lambda$  est, sous sa forme générale, un tenseur à 9 composantes. Seul le cas de matériaux isotropes est traité ici. Lorsqu'on a affaire à des matériaux orthotropes fibreux comme le bois ou le graphite, par exemple, les transports dans différentes directions ont des conductivités très différentes.

L'extensité spécifique (ici, par unité de masse), notée par la suite  $\phi$  et le potentiel  $V$  peuvent le plus souvent être reliés par une relation de type :

$$d\phi = C dV \quad (1.2)$$

qui définit  $C = d\phi/dV$ , la capacité de l'extensité. On fait généralement apparaître le coefficient  $C$  ; la densité de flux diffusif devient alors :

$$\vec{j}_\Phi = -\Gamma \nabla \phi \quad (1.3)$$

Le tableau 1 présente l'analogie entre les trois lois phénoménologiques de la diffusion pour les transports de chaleur, de matière, et de quantité de mouvement (ainsi que pour le transport d'électricité). Comme on l'a déjà précisé, les lois utilisées sont des lois simplifiées, qui supposent entre autres que le milieu est incompressible. C'est l'analyse physique du problème à traiter qui permet de remplacer éventuellement ces lois par des lois de même type, qui peuvent être alors un peu plus complexes.

### 1.1.4 Le transport convectif

Lorsqu'en un point du système que l'on étudie la vitesse barycentrique est différente de zéro, il existe un mouvement d'ensemble du milieu qui transporte la matière et les extensités associées (chaleur et quantité de mouvement). Ce mode de transport, appelé *transport par convection*, est caractérisé par une densité de flux

$$\vec{j}_\Phi = \rho \phi \vec{v}. \quad (1.4)$$

où

- $\rho$  est la masse volumique du système,
- $\phi$  l'extensité spécifique (par unité de masse),
- $\vec{v}$  le vecteur vitesse (barycentrique) instantané.

Cette écriture unifie immédiatement plusieurs cas particuliers. Par exemple :

- **Transport de matière** : pour un constituant  $i$  d'un mélange,

$$\vec{j}_i^c = \rho \omega_i \vec{v},$$

où  $\omega_i$  est la fraction (titre) massique du constituant  $i$ .

- **Transport de chaleur** : en termes d'enthalpie massique  $h$ ,

$$\vec{j}_h^c = \rho h \vec{v}.$$

- **Transport de quantité de mouvement** : pour la composante selon  $x$ ,

$$\vec{j}_{v_x}^c = \rho v_x \vec{v}.$$

On voit ainsi que, lorsque l'extensité transportée est la *quantité de mouvement* (un vecteur), la densité de flux convectif associée est un *tenseur* (d'ordre 2), comme l'est d'ailleurs la densité de flux diffusif (tenseur des contraintes).

## 1.2 L'équation de transport convecto-diffusif

### 1.2.1 L'équation générale

La mise en équation des phénomènes de transport convectif et diffusif s'effectue en écrivant le bilan différentiel dans un volume élémentaire. On peut, sans entrer ici dans le détail, obtenir une équation locale de conservation sous la forme :

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}}_{\text{accumulation}} = - \underbrace{\text{div}(\vec{j}_\Phi)}_{\text{sortie} - \text{entrée}} + \underbrace{S}_{\text{création}}. \quad (1.5)$$

où  $(\rho\phi)$  est l'extensité volumique, et  $S$  la vitesse de création de  $\Phi$  par unité de volume (quantité de  $\Phi$  créée par unité de volume et de temps).

Ce terme de création, qui est évidemment négatif lorsqu'il y a consommation de  $\Phi$ , peut correspondre :

- pour le transport de matière, à la production (ou la disparition) de l'espèce chimique  $i$  par réaction ;
- pour le transport de quantité de mouvement, à une force volumique ou à une force de pression ;
- pour le transport de chaleur, à un dégagement de chaleur par effet Joule ou par frottement visqueux, ou du fait du travail des forces de pression, ou encore à cause de l'exo- ou endothermicité de réactions chimiques.

Dans l'équation (1.5), la densité de flux  $\vec{j}_\Phi$  correspond à la somme des transports convectif et diffusif. En remplaçant par leurs expressions (1.3) et (1.4), on obtient :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = -\text{div}(\rho\phi \vec{v} - \Gamma \nabla \phi) + S \quad (1.6)$$

Après un léger remaniement, l'équation générale de transport prend sa forme définitive :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi \vec{v}) = \text{div}(\Gamma \nabla \phi) + S \quad (1.7)$$

#### Universalité de l'équation de transport.

L'universalité de l'équation générale de transport convecto-diffusif (1.7) a pour conséquence directe qu'une même méthode numérique peut être utilisée pour traiter l'ensemble des phénomènes de transport.

Plus généralement, toute équation aux dérivées partielles qui peut se mettre formellement sous la forme de (1.7) (ou de (1.10)), présentée plus loin) pourra être résolue par la méthode numérique exposée dans ce cours, même si aucune extensité n'est, à proprement parler, transportée. Il suffit alors d'établir une correspondance terme à terme afin d'identifier une "extensité", une "conductivité", etc.

#### Lecture physique des termes.

L'équation (1.7) comporte quatre contributions correspondant à des phénomènes physiques bien connus :

- **accumulation** (variation temporelle),
- **convection** (transport par le mouvement d'ensemble),
- **diffusion** (transport sous l'effet de gradients),
- **création** (terme source).

Selon le problème considéré, l'un ou plusieurs de ces termes peuvent disparaître. Par exemple :

- en régime permanent, le terme  $\partial(\rho\phi)/\partial t$  est nul ;
- pour un fluide idéal (viscosité nulle) ou un constituant ne diffusant pratiquement pas, le terme diffusif est négligeable.

Toute combinaison de ces phénomènes est bien sûr possible. En cas de doute, on pourra reprendre la démarche complète en remplaçant les relations générales (1.1) à (1.4) par celles qui décrivent au mieux le phénomène étudié.

#### Conséquences sur la nature de l'équation.

Les dérivées du second ordre (du type  $\partial^2/\partial x^2$ ) proviennent des termes diffusifs. À l'inverse, les termes convectifs sont à l'origine de dérivées du premier ordre (du type  $\partial/\partial x$ ) par rapport aux variables d'espace.

Ainsi, pour une variable d'espace donnée :

- si le terme diffusif est négligeable dans cette direction, l'équation est dite **parabolique** suivant cette variable ;
- si la dérivée du second ordre est présente, l'équation est dite **elliptique** suivant cette variable.

Un cas typique d'équation parabolique dans une direction et elliptique dans une autre se rencontre lors de l'étude d'un écoulement monodirectionnel avec transport de chaleur, comme le représente la figure 1.2.

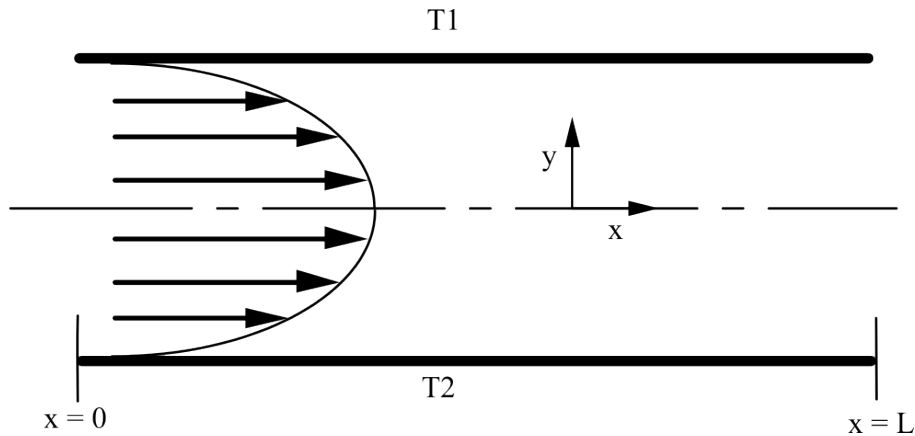


Figure 1.2 – Équation elliptique ou parabolique ?

Entre deux plaques planes portées à des températures différentes, un fluide s'écoule parallèlement aux plaques. En régime permanent et en l'absence de terme de création, l'équation de transport de chaleur au sein de ce fluide s'écrit, si les propriétés physiques ( $\lambda$ ,  $C_p$ ,  $\rho$ ) sont indépendantes de la température (voir plus loin la discussion de l'équation (1.18)) :

$$\rho C_p v_x \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{I-8})$$

Si la vitesse  $v_x$  est suffisamment importante, ce que l'on peut caractériser par la valeur du nombre adimensionnel de Péclet

$$Pe = \frac{\rho C_p v_x L}{\lambda}$$

alors le terme diffusif (dérivée du second ordre) dans la direction  $x$ ,  $\partial^2 T / \partial x^2$ , devient négligeable devant le terme convectif (dérivée du premier ordre),  $\rho C_p v_x \partial T / \partial x$ . L'équation de transport de chaleur se simplifie alors en :

$$\rho C_p v_x \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{I-9})$$

Selon nos définitions, il s'agit bien d'une équation **parabolique** suivant  $x$  et **elliptique** suivant  $y$ .

L'intérêt d'une telle distinction apparaîtra plus nettement lors de l'étude des conditions aux limites. On peut d'ores et déjà remarquer que l'équation de transport (1.7), en régime instationnaire, est toujours parabolique par rapport au temps.

## 1.2.2 Cas particuliers de l'équation générale

Nous allons à présent étudier quelques cas particuliers de l'équation générale, correspondant aux transports de matière, de quantité de mouvement, de chaleur, ou d'autres extensités.

### Transport de matière

Lorsque l'extensité considérée est la masse d'un constituant  $i$ , l'équation générale de transport devient, en remplaçant terme à terme :

$$\frac{\partial(\rho \omega_i)}{\partial t} + \text{div}(\rho \omega_i \vec{v}) = \text{div}(D_i \rho \nabla \omega_i) + S_i \quad (\text{1.8})$$

où  $\omega_i$  est le titre massique en constituant  $i$  et  $S_i$  le taux volumique de production de  $i$  par réaction chimique.

Si l'extensité considérée  $\Phi$  est la masse totale, l'extensité spécifique  $\phi$  est alors égale à 1, et le flux de diffusion est nul. Par ailleurs, si l'on exclut le cas des réactions nucléaires, le terme de création est également nul. L'équation générale de transport (1.7) se réduit alors tout simplement à l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{1.9})$$

Il est très courant d'utiliser, à la place de l'équation générale (1.7), une équation obtenue en retranchant de (1.7) le produit de l'équation de continuité (1.9) par la variable  $\phi$  :

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \phi = \text{div}(\Gamma \nabla \phi) + S \quad (\text{1.10})$$

Alors que l'équation (1.7) provient directement d'un bilan différentiel et exprime la conservation de l'extensité  $\Phi$ , l'équation (1.10) est le résultat d'une manipulation mathématique et n'a pas de signification physique absolue. Lors de la résolution numérique par la méthode des volumes finis, on essaiera le plus souvent de discrétiser la forme conservative (1.7) de l'équation générale de transport.

## Transport de quantité de mouvement

Le transport de la quantité de mouvement selon une direction  $x$  s'écrit, à partir de l'équation générale :

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v} v_x) = \text{div}(\mu \nabla v_x) + S \quad (1.11)$$

Dans le terme  $S$  interviennent alors principalement les forces volumiques (et en particulier la pesanteur  $\rho g_x$ ) et les forces de pression  $-\partial P/\partial x$ . En fait, pour un fluide non-newtonien en particulier, des termes de frottement visqueux supplémentaires peuvent apparaître, que nous négligerons dans la suite de ce cours.

L'équation (1.11) devient alors la "célèbre" équation de Navier–Stokes :

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v} v_x) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \text{div}(\mu \nabla v_x) + \rho g_x \quad (1.12)$$

Des équations similaires régissent évidemment le transport des autres composantes de la quantité de mouvement.

## Turbulence

À ce stade, notons simplement que la résolution numérique des problèmes de transport dans un fluide en écoulement turbulent impose le plus souvent la résolution d'équations convecto-diffusives supplémentaires, telles que celle qui exprime le transport de l'énergie cinétique turbulente par unité de masse  $k$ . Cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v} k) = \text{div}(\Gamma_k \nabla k) + S_k \quad (1.13)$$

Les termes  $\Gamma_k$  et  $S_k$  ne seront pas explicités pour l'instant. Il nous suffit de savoir que, sur le plan numérique, la nature laminaire ou turbulente de l'écoulement ne change rien à la méthode fondamentale de résolution.

## Transport de chaleur

L'extensité transférée est ici l'enthalpie, ou quantité de chaleur (si l'on néglige le travail des forces de pression). Si  $h$  est l'enthalpie massique, on écrit directement l'équation de transport :

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \text{div}(\rho h \vec{v}) = \text{div}\left(\frac{\lambda}{C_p} \nabla h\right) + q \quad (1.14)$$

Si, dans le domaine de températures considéré, on peut supposer que la chaleur spécifique  $C_p$  est constante, on peut alors poser :

$$h = C_p T + h_0 \quad (1.15)$$

L'équation (1.14) devient alors :

$$C_p \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + C_p \text{div}(\rho T \vec{v}) = \text{div}(\lambda \nabla T) + q \quad (1.16)$$

ou, sous la forme non conservative (c'est-à-dire en retranchant le produit de  $T$  par l'équation de continuité (1.9)) :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \vec{v} \cdot \nabla T = \text{div}(\lambda \nabla T) + q \quad (1.17)$$

En fait, cette équation reste correcte même si la chaleur spécifique varie avec la température. La démonstration devient simplement beaucoup plus fastidieuse. Par contre, elle n'est valable que s'il existe clairement une chaleur spécifique, c'est-à-dire, en particulier, que le système ne subit aucun changement de phases.

Si la conductivité thermique  $\lambda$  est également constante, l'équation (1.17) prend une forme condensée :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \frac{\lambda}{\rho C_p} \nabla^2 T + \frac{q}{\rho C_p} \quad (1.18)$$

qui est peut-être la forme la plus connue de "l'équation de la chaleur".

## 1.3 Conditions aux limites

La résolution, par une méthode analytique ou numérique, de l'équation de transport convectivo-diffusif nécessite la détermination de ses conditions initiales et aux limites. Il existe fondamentalement trois types de conditions aux limites (ou, en abrégé, c.l.) qui portent sur la détermination de la densité de flux d'extensité à la frontière du système étudié. Par ailleurs, la nature de l'équation, elliptique ou parabolique, par rapport aux différentes variables d'espace et de temps, impose le nombre (et en partie le type) de c.l. nécessaires.

Nous allons tout d'abord passer en revue les différentes catégories de conditions aux limites, puis nous examinerons les exigences mathématiques de l'équation aux dérivées partielles en ce qui concerne ces conditions aux limites.

### 1.3.1 Les trois sortes de conditions aux limites

À la frontière du système étudié, la densité de flux d'extensité normale  $\vec{\varphi} \cdot \vec{n}$ , que nous noterons  $\varphi$ , est donnée par l'une des trois conditions aux limites suivantes.

#### Condition de Neumann

La condition de Neumann exprime la connaissance de la valeur de  $\varphi$  en un point de la frontière et s'écrit par conséquent en ce point :

$$\boxed{\varphi = \text{cte}} \quad (1.19)$$

La condition de Neumann est fréquemment utilisée :

- lorsque des mesures expérimentales de flux ont été réalisées;
- sous la forme  $\varphi = 0$ , pour représenter les conditions de symétrie;
- également sous la forme  $\varphi = 0$ , pour simuler :
  - l'adiabatisation (transport de chaleur),
  - l'imperméabilité (transport de matière),
  - le frottement nul (ou glissement parfait) à la surface libre d'un écoulement (transport de q. d. m.).

### Condition de Fourier

La condition de Fourier exprime l'existence d'une relation entre densité de flux normale et extensité spécifique en un point de la surface, et s'écrit de la manière générale :

$$\boxed{\varphi = f(\phi)} \quad (1.20)$$

Dans la majorité des cas, cette relation est linéaire. Un exemple typique est le transfert de chaleur à la surface d'un solide par convection de l'atmosphère ambiante. La densité de flux de chaleur sortant du solide peut s'exprimer sous la forme :

$$\varphi = h(T - T_{\text{ext}}) \quad (1.21)$$

où  $T_{\text{ext}}$  est la température de l'air ambiant et  $h$  un coefficient de transfert, ou conductance, qui exprime la résistance thermique correspondant à l'établissement d'une couche limite d'air au voisinage de la surface. Ce coefficient de transfert thermique ne doit bien sûr pas être confondu avec l'enthalpie massique, également notée  $h$ . L'expression de (1.21) à l'aide de la température plutôt que de l'enthalpie spécifique est très courante (cf. (1.16)).

Une autre condition aux limites classique, pour le transport de chaleur, est le rayonnement d'une surface :

$$\varphi = \sigma \varepsilon (T^4 - T_{\text{ext}}^4) \quad (1.22)$$

où  $\sigma$  est la constante de Stefan–Boltzmann et  $\varepsilon$  l'émissivité de la surface (dans l'hypothèse du corps gris).

Plus courantes que les conditions de Neumann, les c.l. de Fourier sont, comme nous le verrons, faciles à prendre en compte d'un point de vue numérique. On essaiera systématiquement de se mettre sous la forme d'une loi telle que (1.21), le coefficient  $h$  étant alors, bien entendu, susceptible de dépendre de la valeur de  $\phi$ .

### Condition de Dirichlet

La condition aux limites de Dirichlet peut être considérée comme une forme asymptotique de la c.l. de Fourier linéarisée, avec une valeur infinie du coefficient de transfert. Elle exprime en fait la connaissance de la valeur de l'extensité en un point de la frontière :

$$\phi = \text{cte} \quad (1.23)$$

Cette condition aux limites se rencontre classiquement :

- en transport de matière, pour exprimer l'équilibre thermodynamique avec une phase de composition connue ;
- en transport de chaleur, lorsque des mesures de température sont disponibles, ou pour exprimer un contact parfait avec un milieu dont la température est connue ;
- en mécanique des fluides, pour simuler une vitesse imposée, ou une vitesse nulle en un point au contact d'une paroi solide immobile.

### 1.3.2 Quelques considérations mathématiques sur les c.l.

De manière générale, notons tout d'abord que l'écriture de conditions aux limites est nécessaire sur l'ensemble de la frontière du système étudié. Par contre, à l'intérieur même du système, la continuité de la densité de flux de transport à l'interface entre deux matériaux est une évidence physique, qui ne nécessite pas l'écriture de c.l. particulières. Seule une éventuelle résistance de contact sera modélisée par le biais de l'existence, entre les deux matériaux, d'une densité de flux de la forme :

$$\varphi = h(\phi_1 - \phi_2) \quad (1.24)$$

où  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont les valeurs de l'extensité spécifique massique  $\phi$  en deux points infiniment voisins, mais appartenant à des milieux différents, et  $h$  un coefficient de transfert qui traduit la résistance interfaciale (on parle alors de transferts conjugués).

Une exception importante à la règle précédente (nécessité de c.l. sur l'ensemble des frontières) concerne les équations paraboliques par rapport à une variable d'espace  $x$ . Si l'on se réfère à la figure (I-2), par exemple, il est évident qu'aucune condition aux limites n'est nécessaire en  $x = L$ , la densité de flux et la température en ce point étant déterminées par l'état du système en amont. Ceci est à rapprocher du fait que, mathématiquement, l'équation parabolique correspond à une dérivée première ( $\Rightarrow$  une seule c.l.) alors que l'équation elliptique correspond à une dérivée seconde ( $\Rightarrow$  deux c.l.).

Dans le cas de la figure (I-2), la seule condition aux limites selon la direction  $x$  nécessaire pour résoudre l'équation de transport de chaleur concerne la frontière  $x = 0$ . On parle, en ce cas, et pour des raisons évidentes, de condition initiale. De la même manière, lorsque la variable considérée est le temps, seule une condition initiale est nécessaire (théoriquement, cela peut aussi bien être une condition "finale". Toutefois, la résolution des "problèmes inverses" dépasse le cadre de ce cours).

Une cause courante de difficultés lors de la résolution numérique est ainsi la sur-spécification de conditions aux limites pour les équations paraboliques par rapport à une variable d'espace. Ceci est souvent dû au fait que le caractère parabolique (dominé par le transport convectif) du problème traité a échappé à l'examen lors de la modélisation mathématique.

Dans l'équation aux dérivées partielles, seules les dérivées de la variable  $\phi$  apparaissent. Afin de calculer, analytiquement ou numériquement, le champ d'extensité autrement qu'"à une constante près", une condition initiale, si elle existe, doit toujours être une condition de Dirichlet. S'il n'y a pas de condition initiale (problème totalement elliptique), il est nécessaire de faire apparaître de manière explicite la variable  $\phi$  en au moins un point. Ainsi, une condition aux limites de type Dirichlet est requise en au moins un point de la frontière.



## Chapitre 2

# Équations de Navier–Stokes : variables secondaires

### 2.1 Introduction

La résolution numérique des équations de transport convecto-diffusives (chaleur, matière, etc.) est possible lorsque les coefficients de l'équation (1.7) sont connus, à savoir :

- les termes de création et de dissipation volumique d'extensité (termes source)
- les paramètres physiques  $(\rho, \Gamma)$ , éventuellement dépendants de  $\phi$
- la vitesse barycentrique en tout point

Dans la pratique, il est rare que ce dernier terme soit connu avec précision, en particulier lorsqu'il correspond à la vitesse locale d'un fluide en écoulement. Nous serons donc souvent confrontés au problème de la détermination du champ de vitesses locales instantanées  $\vec{v}(x, y, z, t)$ . Le calcul de ce champ nécessite, dans la grande majorité des cas, la résolution numérique des équations de transfert de quantité de mouvement.

La nature conservative de la quantité de mouvement permet l'écriture de bilans. Dans le cas d'un fluide incompressible à viscosité constante en écoulement laminaire, un bilan différentiel de quantité de mouvement selon une direction  $x$  quelconque s'écrit :

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v} v_x) = \text{div}(\mu \nabla v_x) + F_x \quad (2.1)$$

et de même dans les directions  $y$  et  $z$

Dans (2.1), le terme source est constitué par la composante (dans la même direction  $x$ ) du vecteur des forces extérieures. Ces forces extérieures sont :

- les forces de pression  $-\nabla P$
- les forces volumiques externes  $\vec{F}$

Les équations de Navier–Stokes s'écrivent ainsi, dans le cas général 3-D :

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v} v_x) = \text{div}(\mu \nabla v_x) - \frac{\partial P}{\partial x} + F_x \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v} v_y) = \text{div}(\mu \nabla v_y) - \frac{\partial P}{\partial y} + F_y \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v} v_z) = \text{div}(\mu \nabla v_z) - \frac{\partial P}{\partial z} + F_z \quad (2.4)$$

## 2.2 Particularités de la résolution numérique des équations de Navier–Stokes

L'écriture des équations (2.2)–(2.4) met en évidence deux difficultés, susceptibles de compliquer la résolution numérique par rapport aux équations convecto-diffusives usuelles :

- **Non-linéarité.** La présence de  $\vec{v}$  dans le coefficient du terme convectif, alors même que la variable transportée est  $v_x$  (ou  $v_y$ , ou  $v_z$ ), implique une forte non-linéarité. En pratique, ce caractère non-linéaire n'empêche pas la résolution par des schémas itératifs classiques (type Gauss–Seidel), au prix éventuel d'une sous-relaxation
- **Pression inconnue.** Le terme  $-\nabla P$  est plus gênant : le champ de pression n'est pas fixé a priori et constitue une inconnue du problème, car une partie du gradient de pression est induite par le mouvement. On pourrait croire que le nombre d'inconnues dépasse celui des équations d'une unité

L'équation supplémentaire provient de la conservation de la masse totale (équation de continuité), qui s'écrit pour un fluide incompressible :

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (2.5)$$

Il ne s'agit toutefois pas d'une équation de type (1.7) ayant  $P$  pour inconnue. Nous verrons dans le chapitre suivant comment cet ensemble d'équations couplées est habituellement résolu. Pour le moment, nous nous intéressons à un traitement mathématique particulier des équations de Navier–Stokes dans le cas d'un transfert bidimensionnel.

## 2.3 Variables primitives et variables secondaires

Plaçons-nous dans le cas du transfert de quantité de mouvement, en coordonnées cartésiennes bidimensionnelles  $(x, y)$ , pour un fluide incompressible à viscosité constante en écoulement laminaire. Le problème est décrit par trois équations (deux équations de Navier–Stokes et l'équation de continuité) pour trois inconnues  $(v_x, v_y, P)$ , appelées *variables primitives*.

Nous allons réduire, de manière purement mathématique, le nombre d'équations et d'inconnues à deux en introduisant deux variables secondaires  $\omega$  et  $\psi$ .

**Fonction courant.** La fonction courant  $\psi$  est définie par :

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.6)$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.7)$$

**Vorticité.** La vorticité (ou tourbillon)  $\omega$  est définie par :

$$\omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (2.8)$$

En fait,  $\omega$  représente l'amplitude de la composante selon  $z$  du vecteur rotationnel  $\nabla \times \vec{v}$ . L'existence d'une fonction courant  $\psi$  traduit la satisfaction de l'équation de continuité (2.5). En effet, si  $\psi$  existe, on a automatiquement :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0 \quad (2.9)$$

Du fait des définitions (2.6)–(2.8),  $\omega$  et  $\psi$  sont liées par :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \omega = 0 \quad (2.10)$$

## 2.4 Équation de transport de la vorticité

L'intérêt de la formulation en variables secondaires  $\omega$ – $\psi$  est l'élimination de la pression dans les équations de Navier–Stokes. En remarquant que  $\partial^2 P / \partial x \partial y = \partial^2 P / \partial y \partial x$ , on construit une équation de transport de la vorticité à partir de (2.2) et (2.3), en dérivant (2.2) par rapport à  $y$  et (2.3) par rapport à  $x$ , puis en les soustrayant afin d'éliminer le terme de pression.

Pour ce faire, exprimons d'abord les équations de Navier–Stokes sous forme non conservative (en retranchant de chacune le produit adéquat de l'équation de continuité, cf. chapitre I). On obtient :

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial P}{\partial x} + F_x \quad (2.11)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} - \frac{\partial P}{\partial y} + F_y \quad (2.12)$$

où l'on suppose  $\rho$  et  $\mu$  constantes

La dérivation par rapport à  $y$  de (2.11), et par rapport à  $x$  de (2.12), mène à :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \rho \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_x \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial x} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \rho v_y \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \mu \frac{\partial^3 v_x}{\partial y \partial x^2} + \mu \frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} + \frac{\partial F_x}{\partial y} \quad (2.13)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \rho v_x \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \rho v_y \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} = \mu \frac{\partial^3 v_y}{\partial x^3} + \mu \frac{\partial^3 v_y}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad (2.14)$$

En soustrayant (2.13) de (2.14), on obtient :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \rho v_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \rho v_y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ = \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

On peut alors noter :

- les termes de pression ont disparu, ce qui était le but
- les termes rotationnels de vitesse et de force apparaissent naturellement, ce qui est cohérent avec le fait que la manipulation revient à calculer le rotationnel des équations de Navier–Stokes

Du fait de la définition (2.8), et en posant :

$$(\nabla \times \vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \quad (2.16)$$

l'équation (2.15) devient :

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho \omega \operatorname{div} \vec{v} + \rho v_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial \omega}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + (\nabla \times \vec{F})_z \quad (2.17)$$

Avec la continuité (2.5), on obtient finalement :

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \omega = \mu \nabla^2 \omega + (\nabla \times \vec{F})_z \quad (2.18)$$

Cette équation peut se réécrire sous forme conservative. Comme  $\mu$  est constante :

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \omega) = \operatorname{div}(\mu \nabla \omega) + S_\omega \quad (2.19)$$

Il s'agit d'une équation convecto-diffusive classique, dont les termes de pression ont disparu. Rappelons qu'elle a été obtenue en supposant le fluide incompressible et de viscosité constante. On peut démontrer (au prix d'une démonstration longue) que si ces hypothèses ne sont pas respectées, (2.19) reste valable, mais des termes source supplémentaires doivent être introduits :

$$S_\omega = (\nabla \times \vec{F})_z + S_{\omega,\rho} + S_{\omega,\mu} \quad (2.20)$$

avec

$$S_{\omega,\rho} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v_x^2 + v_y^2}{2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v_x^2 + v_y^2}{2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (2.21)$$

Le terme (2.21) permet de tenir compte de la compressibilité du fluide. L'expression de  $S_{\omega,\mu}$  est très compliquée et inutile dans la grande majorité des cas : il est le plus souvent négligeable, sauf pour des écoulements anisotropes très turbulents ou lorsque la rhéologie du fluide s'écarte fortement d'un comportement newtonien. Ces applications dépassent le cadre de ce cours.

## 2.5 Méthode $\omega$ – $\psi$

La résolution de (2.19) nécessite la connaissance du champ de vitesses. Celui-ci se déduit des définitions (2.6)–(2.7) de la fonction courant. La méthode  $\omega$ – $\psi$  consiste à remplacer l'ensemble des équations de départ (deux équations de Navier–Stokes et une équation de continuité) par le système couplé (2.10) et (2.19), les relations (2.6) et (2.7) étant utilisées pour le calcul des vitesses.

**Système résolu :**

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v} \omega) = \text{div}(\mu \nabla \omega) + S_\omega \quad (2.22)$$

$$\nabla^2 \psi + \omega = 0 \quad (2.23)$$

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.24)$$

Comme (2.10) est une équation diffusive en régime permanent, les méthodes de résolution habituelles pourront être utilisées pour calculer  $(\omega, \psi, \vec{v})$  dans le système bidimensionnel considéré.

**Calcul des vitesses aux faces.** Le calcul de termes tels que  $v_{x,w}$  pour la résolution numérique de (2.19) est particulièrement simple (figure 2.1).

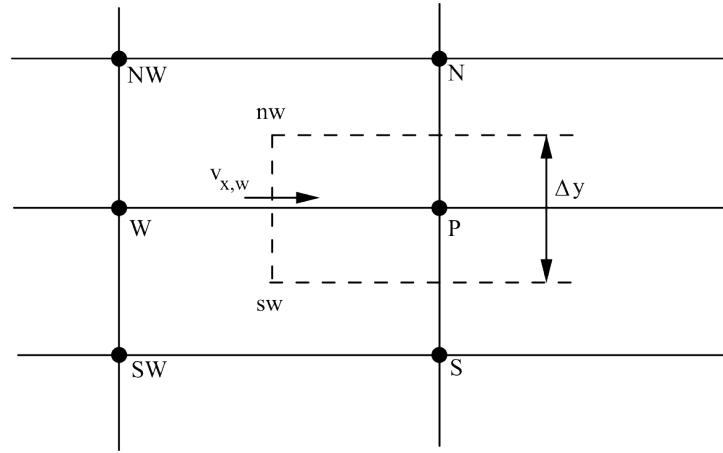


Figure 2.1 – Notations pour le calcul de  $v_{x,w}$  pour une cellule intérieure

On a directement, d'après (2.6) :

$$v_{x,w} = \frac{\psi_{nw} - \psi_{sw}}{\Delta y} \quad (2.25)$$

En supposant en première approximation :

$$\psi_{nw} = \frac{1}{4}(\psi_{NW} + \psi_N + \psi_W + \psi_P) \quad (2.26)$$

$$\psi_{sw} = \frac{1}{4}(\psi_W + \psi_P + \psi_{SW} + \psi_S) \quad (2.27)$$

on obtient immédiatement :

$$v_{x,w} = \frac{1}{4\Delta y}(\psi_{NW} + \psi_N - \psi_{SW} - \psi_S) \quad (2.28)$$

Des relations semblables permettent de calculer  $v_{x,e}$ ,  $v_{y,s}$  et  $v_{y,n}$ . Tous les schémas de discrétisation vus au chapitre précédent (centré, upwind, exponentiel, power-law, etc.) peuvent être appliqués pour traiter les termes convectifs de l'équation de transport de la vorticité.

## 2.6 Conditions aux limites

La méthode  $\omega-\psi$  n'a de sens que si des conditions aux limites physiquement satisfaisantes peuvent être exprimées en termes de vorticité et de fonction courant. De manière générale, cela est possible, sans toutefois pouvoir le garantir dans tous les cas.

L'idée est d'exprimer d'abord les conditions aux limites en termes de vitesses ou de contraintes, puis de les traduire en  $\omega$  et  $\psi$ .

À titre d'exemple, examinons le problème de la figure 2.2.

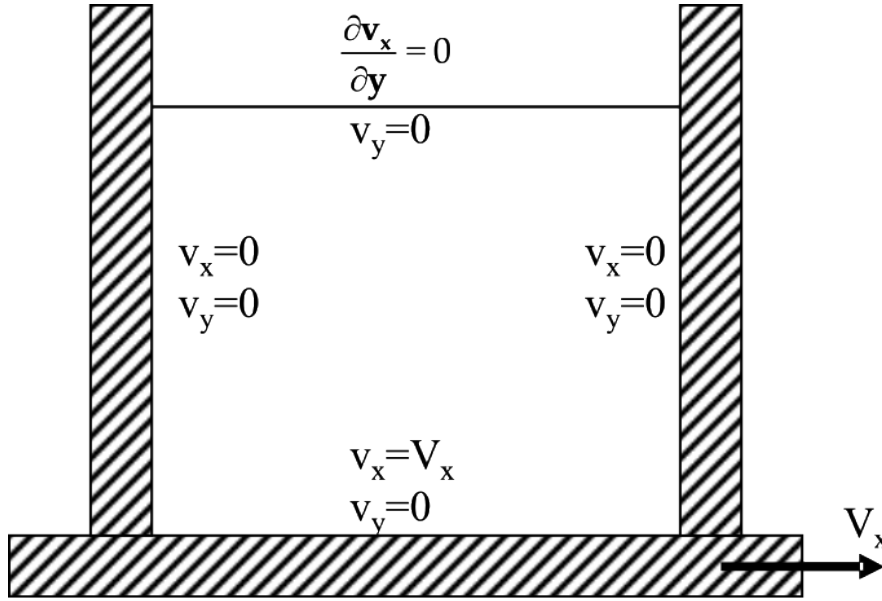


Figure 2.2 – Conditions aux limites pour un problème de “sliding box”

Il s'agit d'une cavité rectangulaire ouverte par le haut, remplie d'un fluide, dont la paroi inférieure est animée d'un mouvement constant dans la direction horizontale. Ce type de problème, souvent appelé *sliding box*, est utilisé pour tester les schémas numériques. Le programme SLIDE, étudié en TD, modélise une situation très semblable.

Les conditions aux limites en  $v_x$  et  $v_y$  sont reportées sur la figure. Elles expriment la continuité des vitesses (pas de glissement) aux interfaces fluide/solide et l'annulation de la contrainte tangentielle à la surface libre (supposée plane). Il s'agit maintenant de déterminer les conditions aux limites en  $\omega$  et  $\psi$ .

### 2.6.1 Conditions aux limites pour la fonction courant

À toutes les frontières du domaine, la composante normale de la vitesse s'annule. D'après (2.6)–(2.7),  $\psi$  est donc constante sur chacune de ces frontières. Par continuité aux coins, cette constante est la même pour toutes les frontières.

La fonction courant n'intervenant que par ses dérivées, elle est définie à une constante près. On peut donc imposer la condition de Dirichlet :

$$\text{À toutes les frontières} \quad \psi = 0 \quad (2.29)$$

## 2.6.2 Conditions aux limites pour la vorticité

### Surface libre

  la surface libre, on a :

$$\text{pour tout } x \quad v_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad (2.31)$$

On en déduit la condition à la limite :

$$\omega = 0 \quad (2.32)$$

Physiquement, cette condition exprime que l'écoulement à la surface libre est irrotationnel.

### Interfaces fluide/solide

  une interface telle que la paroi inférieure, la condition est déterminée après le choix du maillage (figure 2.3).

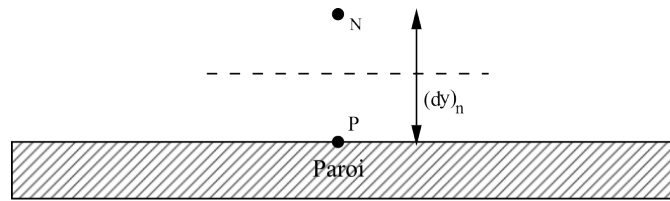


Figure 2.3 – Maillage près de la frontière. Détermination d'une condition aux limites pour  $\omega$

On exprime en fonction de  $\psi$  la vitesse tangentielle  $v_x$ , la vorticité  $\omega$  et son gradient à la paroi :

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \omega = -\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = -\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (2.33)$$

  partir des développements limités en série de Taylor au point N, de  $\psi$  (au 3  ordre) et de  $\omega$  (au 1 r ordre), on obtient :

$$\psi_N = \psi_P + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_P (\delta y)_n + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_P (\delta y)_n^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right)_P (\delta y)_n^3 \quad (2.34)$$

$$\omega_N = \omega_P + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)_P (\delta y)_n \quad (2.35)$$

Comme  $\psi_P = 0$  et  $(v_x)_P = V_x$ , il vient :

$$\psi_N = V_x (\delta y)_n - \frac{\omega_P}{2} (\delta y)_n^2 - \frac{\omega_N - \omega_P}{6(\delta y)_n} (\delta y)_n^3 \quad (2.36)$$

d'où, finalement :

$$\omega_P = \frac{3}{(\delta y)_n} \left( V_x - \frac{\psi_N}{(\delta y)_n} \right) - \frac{\omega_N}{2} \quad (2.37)$$

Cette relation, qui lie  $\omega_P$  à  $\omega_N$ , peut être utilisée comme condition aux limites pour  $\omega$ . Des relations semblables sont établies pour les parois latérales.

Ces conditions aux interfaces solide/fluide constituent un inconvénient majeur de la méthode  $\omega-\psi$ . D'une part, il est difficile de leur attribuer un sens physique direct. D'autre part, l'écriture de (2.35) suppose un profil linéaire de  $\omega$  entre  $P$  et  $N$ , ce qui impose un maillage fin près des interfaces.

## 2.7 Divers

Ce chapitre a présenté les bases de la résolution des équations de Navier–Stokes en variables secondaires  $\omega-\psi$ . Nous abordons à présent quelques points complémentaires.

### 2.7.1 Signification des iso- $\psi$

Les courbes d'iso-fonction courant sont les lignes de courant de l'écoulement. Elles sont tangentes en tout point au vecteur vitesse local instantané. Leur visualisation permet souvent de mieux comprendre l'écoulement qu'une carte du champ de vitesse.

### 2.7.2 Calcul de la pression

La méthode  $\omega-\psi$  fournit le champ de vitesses  $\vec{v}$ . À partir des équations de Navier–Stokes, il est alors possible de déterminer le champ de pression, dont le calcul a simplement été découplé.

### 2.7.3 Coordonnées non cartésiennes

Les équations (2.10) et (2.19) ont été établies en coordonnées cartésiennes. En coordonnées cylindriques  $(r, z)$ , on définit plutôt la fonction courant par :

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2.38)$$

$$v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.39)$$

et des équations de transport pour  $\omega/r$  et pour  $\psi$ , similaires dans leur forme à (2.10) et (2.19), peuvent être établies. Le lecteur intéressé pourra se reporter à l'ouvrage de référence : *Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows*, A. D. Gosman et al., Academic Press, London (1969).

## 2.8 Avantages et inconvénients principaux de la formulation

$\omega-\psi$

Les avantages sont directs : l'élimination de la pression ramène le problème à un système de deux équations couplées, dont (2.10) est une équation diffusive en régime permanent. La forme de (2.10) et (2.19) permet une résolution par les techniques classiques vues dans ce cours.

La formulation vorticité-fonction courant est également bien adaptée aux écoulements recirculants induits par un rotationnel de forces volumiques (par exemple convection naturelle, forces électromagnétiques).

Les inconvénients sont tout aussi clairs : lorsque la pression joue un rôle important (écoulements compressibles notamment), une méthode visant à éviter le calcul couplé de  $P$  est mal adaptée. De plus, dans le cas d'écoulements possédant une direction privilégiée, les conditions aux limites s'expriment souvent plus naturellement en variables primitives. Enfin, l'écriture de conditions aux limites pour  $\omega$  à une paroi solide impose un traitement mathématique peu satisfaisant et requiert un maillage fin près des interfaces.

Enfin, la méthode  $\omega$ - $\psi$  est fondamentalement bidimensionnelle et ne s'applique pas au cas général 3-D, ce qui constitue sa limitation majeure. Après une utilisation intensive dans les années 1960–1970, elle a été progressivement délaissée, notamment pour cette raison. Nous la présentons néanmoins ici pour son intérêt pédagogique, son efficacité en 2-D recirculant et sa facilité de programmation comparée aux méthodes en variables primitives



## Chapitre 3

# Calcul du champ de vitesse en variables primitives

Nous avons vu au chapitre VI une méthode permettant de calculer un champ de vitesse en éliminant la pression dans les équations de conservation de la quantité de mouvement. Cette méthode est cependant limitée aux géométries bidimensionnelles. Par ailleurs, lorsque la pression est l'inconnue recherchée, il est plus naturel de la calculer directement. D'où la nécessité de savoir calculer un champ de vitesse en variables primitives.

Dans un premier temps, nous mettons en évidence la principale difficulté inhérente au calcul du champ de vitesse : le calcul du champ de pression. Ensuite, après avoir donné une solution à ce problème, nous proposons une méthode générale : l'algorithme SIMPLE, présenté par Patankar.

### 3.1 Nécessité d'une procédure particulière

Pour un problème de mécanique des fluides non couplé (écoulement isotherme ou adiabatique réversible sans transfert de masse), et dans le cas d'un fluide newtonien, le système d'équations à résoudre est :

- conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.1)$$

- conservation de la quantité de mouvement, pour  $i = 1$  à  $3$  :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} v_i) = \nabla \cdot (\mu \nabla v_i) - \frac{\partial P}{\partial x_i} + F_i \quad (3.2)$$

- équation d'état :

$$\rho = f(P) \quad (3.3)$$

où  $F_i$  est la composante dans la direction  $i$  des forces volumiques externes.

Les inconnues sont  $\rho$ ,  $\vec{v}$  et  $P$ , soit cinq inconnues scalaires pour cinq équations aux dérivées partielles.

Pour mieux comprendre la difficulté inhérente au calcul du champ de vitesse, supposons le fluide incompressible. Le système d'équations à résoudre devient alors :

- conservation de la masse :

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.4)$$

— conservation de la quantité de mouvement, pour  $i = 1$  à  $3$  :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} v_i) = \nabla \cdot (\mu \nabla v_i) - \frac{\partial P}{\partial x_i} + F_i \quad (3.5)$$

Les trois équations (3.5) sont du type de l'équation (1.7) et peuvent donc être discrétisées par la méthode des volumes finis. À chaque itération, elles fournissent une estimation des composantes de la vitesse pour un champ de pression donné. En revanche, cette estimation ne vérifie pas forcément la conservation de la masse (3.4). On modifie alors le champ de pression afin d'obtenir un champ de vitesse qui satisfasse (3.4). Ce champ corrigé ne vérifie plus nécessairement (3.5), d'où l'utilisation d'une procédure itérative :

1. résolution des équations discrétisées (3.5) avec un champ de pression estimé, donnant une estimation de  $\vec{v}$
2. modification du champ de pression et du champ de vitesse pour vérifier (3.4)
3. retour à l'étape 1 si le champ de vitesse a été modifié

Si le champ de vitesse n'est pas modifié à l'étape 2, on obtient un champ de vitesse compatible à la fois avec la conservation de la quantité de mouvement et avec la conservation de la masse : le problème est résolu.

Il faut donc établir une méthode permettant de corriger pression et vitesse à l'étape 2. Auparavant, nous montrons que la discrétisation de (3.5) nécessite des précautions supplémentaires liées à la pression.

## 3.2 Problèmes liés à la discrétisation de la conservation de la quantité de mouvement

Supposons que les équations (3.5) soient discrétisées en utilisant les mêmes volumes de contrôle pour toutes les composantes de la vitesse et pour les champs scalaires. Cela implique notamment que l'on calcule la pression aux mêmes points que la vitesse.

Pour la direction  $x$ , la discrétisation nécessite l'estimation du terme :

$$- \iiint_V \frac{\partial p}{\partial x} dV = - \iint_S p n_x ds \quad (3.6)$$

où  $n_x$  est la composante selon  $x$  de la normale sortante du volume de contrôle  $V$ .

En supposant la pression uniforme sur les faces  $w$  et  $e$  et, en géométrie bidimensionnelle, on obtient :

$$- \iiint_V \frac{\partial p}{\partial x} dV = -[p_e \Delta y - p_w \Delta y] \quad (3.7)$$

Si les faces  $w$  et  $e$  sont respectivement au milieu des segments  $[W, P]$  et  $[P, E]$ , alors :

$$- \iiint_V \frac{\partial p}{\partial x} dV = \left[ \frac{P_P + P_W}{2} - \frac{P_E + P_P}{2} \right] \Delta y = \left[ \frac{P_W - P_E}{2} \right] \Delta y \quad (3.8)$$

Ce résultat signifie que la discrétisation fait intervenir non pas la différence de pression entre deux points voisins, mais entre les points  $W$  et  $E$ . Il peut en résulter des champs de pression compatibles avec un champ de vitesse nul, sans réalité physique (figure 3.1).

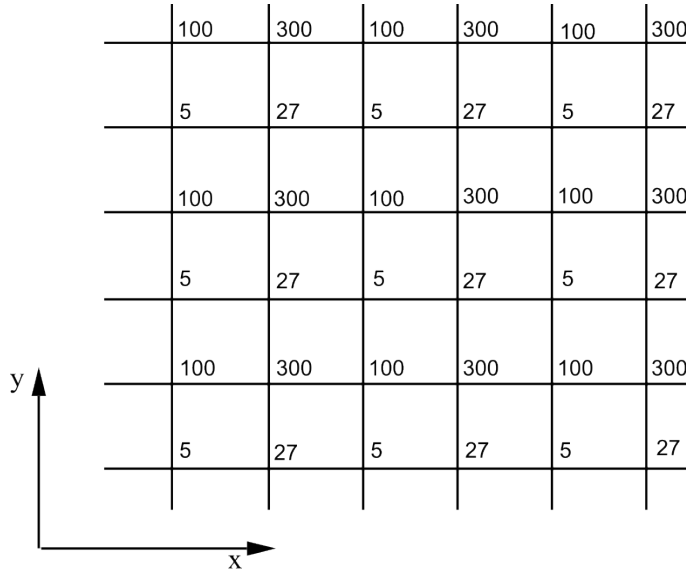


Figure 3.1 – Exemple d'un champ de pression compatible avec la conservation de la masse mais sans réalité physique

Ainsi, l'utilisation d'un maillage colocalisé (toutes les variables sur les mêmes points) conduit à une mauvaise prise en compte du terme source correspondant aux forces de pression exercées sur le volume de contrôle.

### 3.3 Problèmes liés à la discrétisation de la conservation de la masse

Le même problème survient lors de la discrétisation de l'équation de conservation de la masse. Pour une géométrie monodirectionnelle, (3.4) s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.9)$$

En intégrant (3.9) sur le volume de contrôle construit autour du point  $P$ , il vient :

$$u_e - u_w = 0 \quad (3.10)$$

soit :

$$\frac{u_E + u_P}{2} - \frac{u_W + u_P}{2} = \frac{u_E - u_W}{2} = 0 \quad (3.11)$$

Le champ de vitesse représenté en figure 3.2 vérifie (3.11), mais n'a pas de sens physique.

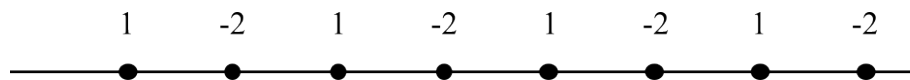


Figure 3.2 – Exemple d'un champ de vitesse vérifiant la conservation de la masse mais sans sens physique

Il faut donc rechercher une solution permettant de résoudre ces deux difficultés.

### 3.4 Une solution : les maillages décalés

On peut pallier ces deux problèmes en utilisant des localisations différentes pour les inconnues. On adopte un maillage décalé : les composantes de la vitesse sont calculées sur les faces des volumes de contrôle, tandis que les grandeurs scalaires (dont la pression) sont calculées au centre des cellules.

Ainsi, les composantes (notées  $u$ ) dans la direction  $x$  sont calculées sur les faces dont la normale est orientée suivant  $x$  (figure 3.3). De même, la figure 3.4 illustre la localisation des composantes (notées  $v$ ) suivant  $y$ .

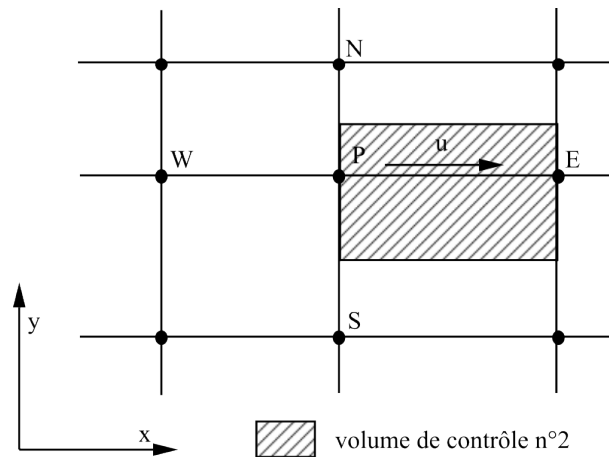


Figure 3.3 – Volume de contrôle pour la discrétisation de la quantité de mouvement selon  $x$  (maillage décalé)

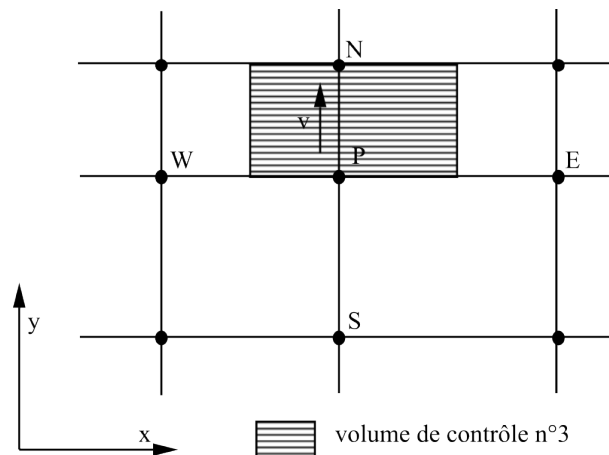


Figure 3.4 – Volume de contrôle pour la discrétisation de la quantité de mouvement selon  $y$  (maillage décalé)

Le volume de contrôle utilisé pour les grandeurs scalaires et pour la conservation de la masse est représenté sur la figure 3.5.

En résumé :

- le volume de contrôle n° 1 est utilisé pour les équations de transport des grandeurs scalaires et pour la conservation de la masse
- le volume de contrôle n° 2 est utilisé pour la conservation de la quantité de mouvement selon  $x$
- le volume de contrôle n° 3 est utilisé pour la conservation de la quantité de mouvement selon  $y$

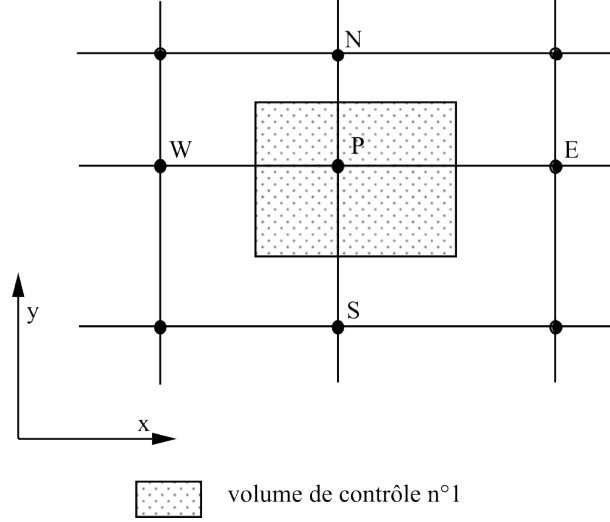


Figure 3.5 – Volume de contrôle pour les grandeurs scalaires et la conservation de la masse

Avec ce choix, les forces de pression font apparaître la différence de pression entre deux points voisins du maillage, et il en est de même pour la conservation de la masse. Ceci vient du fait qu'il n'y a plus d'interpolation à effectuer pour calculer  $P_e$  et  $P_w$ , ou  $u_e$  et  $u_w$ .

On remarquera également que cette localisation des vitesses est idéale pour la discrétisation du transport d'un champ scalaire : le calcul des flux convectifs sur les faces requiert précisément la composante normale de  $\vec{v}$  sur ces faces.

### 3.5 Discrétisation de la conservation de la quantité de mouvement

Dans toute la suite, on se place en géométrie bidimensionnelle cartésienne. On applique la méthode générale du chapitre V.

Pour la direction  $x$ , l'intégration sur le volume de contrôle n° 2 (figure 3.3) conduit à une équation discrétisée de la forme :

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b + (P_P - P_E) A_e \quad (3.12)$$

avec  $A_e = \Delta y$ .

De même, l'intégration de la conservation de la quantité de mouvement selon  $y$  sur le volume de contrôle n° 3 donne :

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + b + (P_P - P_N) A_n \quad (3.13)$$

avec  $A_n = \Delta x$ .

On note  $u^*$  et  $v^*$  les solutions des systèmes discrétisés (3.12) et (3.13) obtenues pour un champ de pression  $P^*$  :

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b + (P_P^* - P_E^*) A_e \quad (3.14)$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + b + (P_P^* - P_N^*) A_n \quad (3.15)$$

### 3.6 Corrections de pression et corrections de vitesse

On introduit la correction de pression  $P'$  définie par :

$$P = P^* + P' \quad (3.16)$$

Les corrections de vitesse associées sont notées  $u'$  et  $v'$  :

$$u = u^* + u' \quad v = v^* + v' \quad (3.17)$$

En soustrayant (3.14) de (3.12), on obtient :

$$a_e u'_e = \sum a_{nb} u'_{nb} + (P'_P - P'_E) A_e \quad (3.18)$$

Si l'on néglige le terme  $\sum a_{nb} u'_{nb}$  dans (3.18), on obtient une relation simple entre correction de vitesse et correction de pression :

$$u'_e = (P'_P - P'_E) \frac{A_e}{a_e} = (P'_P - P'_E) d_e \quad (3.19)$$

avec

$$d_e = \frac{A_e}{a_e} \quad (3.20)$$

On en déduit :

$$u_e = u_e^* + d_e (P'_P - P'_E) \quad (3.21)$$

De même, pour l'autre composante :

$$v_n = v_n^* + d_n (P'_P - P'_N) \quad (3.22)$$

Les relations (3.21) et (3.22) traduisent comment une variation de pression agit sur le champ de vitesse.

### 3.7 De la conservation de la masse à l'équation de correction de pression

En géométrie bidimensionnelle, la conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (3.23)$$

L'intégration de (3.23) sur le volume de contrôle n° 1 (figure 3.5) avec un schéma *full implicit* donne :

$$(\rho_P - \rho_P^0) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + [(\rho u)_e - (\rho u)_w] \Delta y + [(\rho v)_n - (\rho v)_s] \Delta x = 0 \quad (3.24)$$

En substituant (3.21) et (3.22) dans (3.24), on obtient une équation discrétisée portant sur les corrections de pression :

$$a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + b \quad (3.25)$$

avec :

$$a_E = \rho_e d_e \Delta y \quad (3.26)$$

$$a_W = \rho_w d_w \Delta y \quad (3.27)$$

$$a_N = \rho_n d_n \Delta x \quad (3.28)$$

$$a_S = \rho_s d_s \Delta x \quad (3.29)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (3.30)$$

$$b = (\rho_P^0 - \rho_P) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + [(\rho u^*)_e - (\rho u^*)_w] \Delta y + [(\rho v^*)_n - (\rho v^*)_s] \Delta x \quad (3.31)$$

L'équation (3.25) représente la correction à apporter au champ de pression pour que le champ de vitesse vérifie la conservation de la masse. Cependant, dans l'établissement de la relation pression-vitesse à partir de (3.18), nous avons négligé le terme  $\sum a_{nb} u'_{nb}$ . Il est donc nécessaire d'utiliser une procédure itérative pour résoudre le système discrétisé.

### 3.8 Algorithme SIMPLE

Contrairement à ce que pourrait penser le lecteur, SIMPLE ne veut pas dire *simple*, mais *Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*.

Cet algorithme a été mis au point par Patankar et Spalding. Il se déroule suivant la séquence :

1. estimer un champ de pression  $P^*$
2. résoudre les systèmes discrétisés pour la conservation de la quantité de mouvement (3.14) et (3.15), donnant  $u^*$  et  $v^*$
3. résoudre l'équation de correction de pression (3.25), donnant  $P'$
4. calculer le nouveau champ de pression  $P = P^* + P'$
5. calculer  $u$  et  $v$  à partir de (3.21) et (3.22)
6. résoudre les équations discrétisées correspondant aux autres grandeurs scalaires (température, concentration)
7. poser  $P^* = P$  et retourner à l'étape 2 jusqu'à convergence
8. vous pouvez vous reposer, c'est fini

On pourrait objecter que le terme  $\sum a_{nb} u'_{nb}$  a été négligé dans (3.18). Cela n'est pas gênant : à convergence, ce terme est nul, de même que les corrections de pression.

L'algorithme est dit *semi-implicite* car il impose d'itérer entre les équations de conservation de la quantité de mouvement et la conservation de la masse.

Le critère de convergence doit être choisi avec soin : il faut s'assurer que les corrections de pression sont négligeables. Un bon indicateur est le terme source  $b$  dans l'équation de correction de pression (3.25).

Des divergences peuvent survenir, et il peut être nécessaire de relaxer la pression. Dans ce cas, l'étape 4 devient :

$$P = P^* + \alpha_p P' \quad (3.32)$$

où  $\alpha_p$  est un coefficient de relaxation de l'ordre de 0,8.

Pour conserver un champ de vitesse satisfaisant la conservation de la masse, il ne faut surtout pas relaxer les corrections de vitesse. Il est important de travailler tout au long du processus itératif avec un champ de vitesse conservatif, car cette propriété est utilisée pour

élaborer le schéma discrétisé d'une équation de transport d'une grandeur scalaire au chapitre V.

En revanche, il est possible, et même conseillé, de relaxer  $u^*$  et  $v^*$ , un coefficient de relaxation de l'ordre de 0,5 étant couramment utilisé

## Chapitre 4

# Turbulence

## Modélisation et simulation

### 4.1 Mise en évidence de la turbulence

Reynolds a mis en œuvre en 1883 l'expérience schématisée sur la figure 4.1 : un tube de verre (2 m de longueur et 2 mm de diamètre), dans lequel circule de l'eau, est alimenté au voisinage de son axe par un filet d'eau coloré.

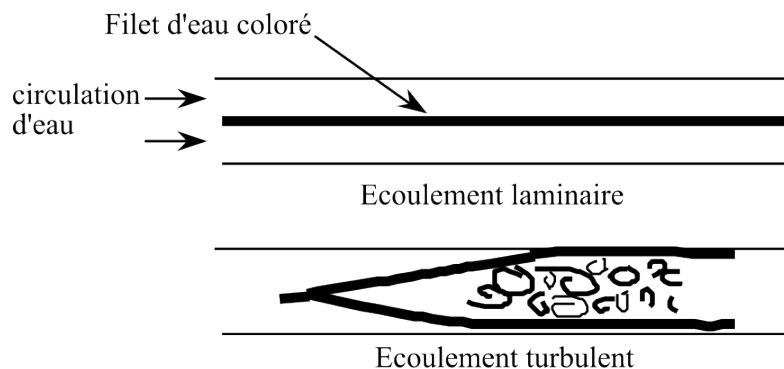


Figure 4.1 – Étude de l'écoulement par un traceur coloré injecté dans de l'eau ; expérience de Reynolds (1883)

Tant que le débit reste faible, le filet coloré ne s'élargit pas et demeure parallèle à l'axe du tube. L'écoulement, qui s'effectue en lignes de courant parallèles, est laminaire.

Lorsque le débit augmente, le filet coloré se brise en tourbillons de tailles variées, et le volume de liquide coloré s'agrandit jusqu'à occuper toute la section du tube. Aux filets de fluide se déplaçant de façon ordonnée, parallèlement à l'axe du tube, se substitue un écoulement désordonné qui conduit au mélange de l'eau et du colorant. L'écoulement est alors appelé turbulent.

Une autre manifestation de la turbulence est observable sur le profil de vitesses. On constate sur la figure 4.2 que le profil de vitesse est beaucoup plus plat en écoulement turbulent qu'en écoulement laminaire. Ceci peut être expliqué qualitativement par la présence des tourbillons qui tendent à supprimer les gradients de vitesses. Cette manifestation peut être élargie aux profils de température ou de concentration d'un soluté lorsque des transferts

de chaleur ou de matière interviennent entre le fluide et la paroi du tube. Les profils sont toujours plus plats en régime turbulent.

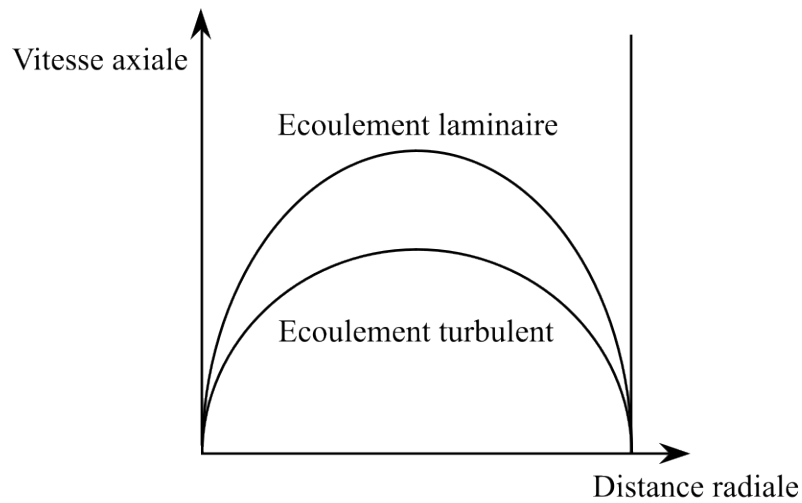


Figure 4.2 – Comparaison des profils de vitesses axiales laminaire et turbulent dans une canalisation

La figure 4.3 présente une autre illustration de la turbulence avec l'exemple quotidien d'un jet de fumée visualisé ici par une technique d'illumination laser. L'écoulement parfaitement laminaire au départ vient se briser sur l'atmosphère au repos, et former des tourbillons de tailles relativement importantes. Les tourbillons en se déplaçant se fracturent en agrégats de fluides de plus en plus petits jusqu'à disparaître aux yeux de l'observateur.

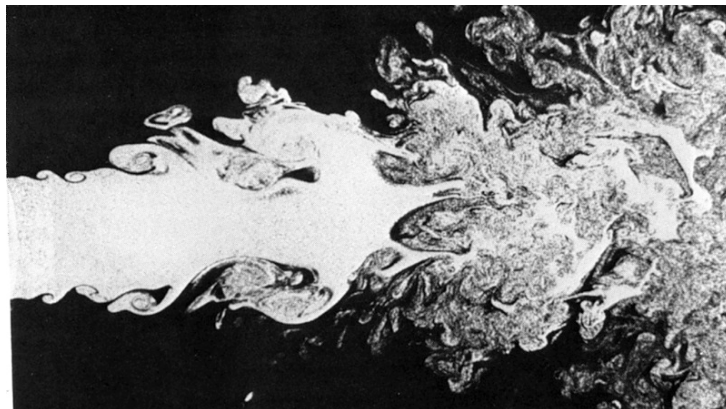


Figure 4.3 – Visualisation d'un jet de fumée "La Recherche, 139, pp 1412–1425"

## 4.2 Caractérisation et description du mouvement turbulent

La turbulence est une propriété des écoulements du fluide et non une propriété du fluide lui-même. Les mécaniciens des fluides ne donnent pas de définition stricte de la turbulence mais indiquent les caractéristiques que présentent les écoulements de fluide appelés turbulents.

### 4.2.1 Caractère aléatoire

La figure 4.4 présente l'enregistrement d'une des coordonnées du vecteur vitesse d'un fluide en un point d'un écoulement turbulent.

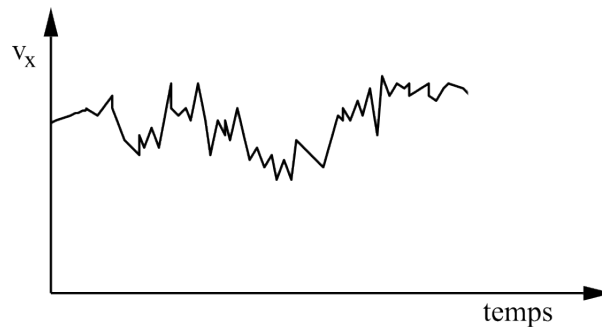


Figure 4.4 – Exemple d'enregistrement d'une des coordonnées du vecteur vitesse en un point d'un écoulement turbulent

L'évolution dans le temps apparaît d'une telle complexité, que les caractères aléatoire et d'imprédictibilité des grandeurs doivent être retenus. Ces fluctuations liées à la turbulence sont observées aussi pour la pression et toutes les autres grandeurs intensives, température, concentration en un élément donné... Remarquons que les fluctuations organisées ou périodiques ne font pas parties de l'agitation turbulente, comme c'est le cas des écoulements pulsés dans lesquels il faudra retrancher la composante périodique pour obtenir le signal turbulent.

### 4.2.2 Propriété de transport

De même que l'agitation moléculaire produit une diffusion des variables extensives transportables, l'agitation turbulente produit une "diffusion" de ces grandeurs, avec des effets qui dépassent souvent fortement en intensité ceux de la diffusion moléculaire (comme le montre l'expérience de Reynolds, et permet de justifier les profils plats observés sur la figure 4.2. Cette propriété est probablement la plus importante pour les ingénieurs et rend l'étude et la prise en compte de la turbulence indispensable.

### 4.2.3 Caractère rotationnel

L'écoulement turbulent, de part la formation des tourbillons, génère un mouvement rotationnel fluctuant du fluide (déformation du fluide par rotation). Ce caractère peut être justifiée en étudiant l'origine de la turbulence à partir de l'exemple de l'expérience de Reynolds, et en considérant une rugosité de la paroi du tube schématisé sur la figure 4.5.

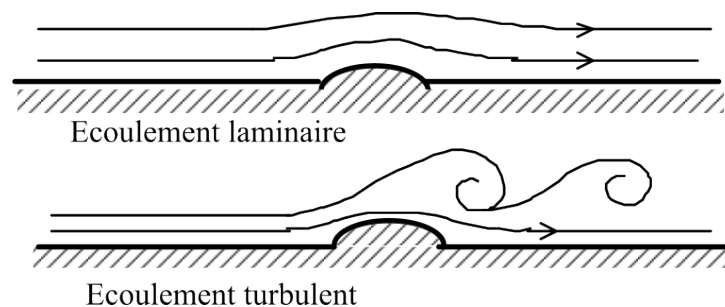


Figure 4.5 – Lignes de courant à proximité de la rugosité d'une paroi

Lorsque les vitesses du fluide sont faibles, les contraintes visqueuses vont créer une force antagoniste aux forces d'inerties normales à la paroi et les lignes de courant resteront parallèles les unes aux autres. Par contre pour de grandes vitesses, les forces d'inerties l'emportent et créent un mouvement rotationnel, le plus souvent tridimensionnel. La vorticité (définie comme le rotationnel du vecteur vitesse) est produite aux proximités de parois (ou interfaces entre deux fluides) lorsqu'une condition à la limite sur la vitesse est imposée. La turbulence est toujours associée à la vorticité, et il est impossible d'imaginer un écoulement turbulent irrotationnel. Pour illustrer schématiquement ce propos, des vagues de l'océan peuvent être caractérisées par des variables aléatoires, mais ne sont pas considérées comme turbulentes dans la mesure où elles sont irrotationnelles. Par contre, elles peuvent avoir les caractères de la turbulence dans les zones de déferlement où existe un mouvement rotationnel.

#### **4.2.4 Caractère dissipatif - Cascade d'énergie**

L'écoulement turbulent est le siège d'un transfert d'énergie successivement du mouvement moyen aux grands tourbillons, puis jusqu'aux plus petits, ces derniers perdant finalement leur énergie par dissipation visqueuse. Cette chaîne d'évènements est appelée la cascade d'énergie, et a été introduite par Kolmogorov (1941).

Nous avons vu que les tourbillons qui apparaissent ont une dimension relativement importante liée aux limites du système promoteur de la turbulence. De plus, et bien que habituellement tridimensionnelle, ces tourbillons sont anisotropes puisqu'ils sont soumis à l'influence à la fois de la géométrie du domaine et du mouvement moyen de l'écoulement.

L'expérience a montré que ces tourbillons se fragmentent en agrégats de fluide de plus en plus petits jusqu'à disparaître complètement aux yeux de l'observateur. Ce comportement en cascade s'exprime en terme d'énergie de la manière suivante : la création des gros tourbillons correspond à la création d'énergie cinétique turbulente à partir de l'énergie cinétique moyenne du fluide. La turbulence ralentit ainsi le mouvement moyen. Le mouvement des tourbillons s'accompagne d'un transport d'extensités par turbulence, et en particulier d'un transport de cette énergie cinétique turbulente. La dégradation constante des tourbillons est associée à la dissipation de cette énergie, qui se transforme finalement par dissipation visqueuse en chaleur, suivant l'arborescence de la figure 4.6.

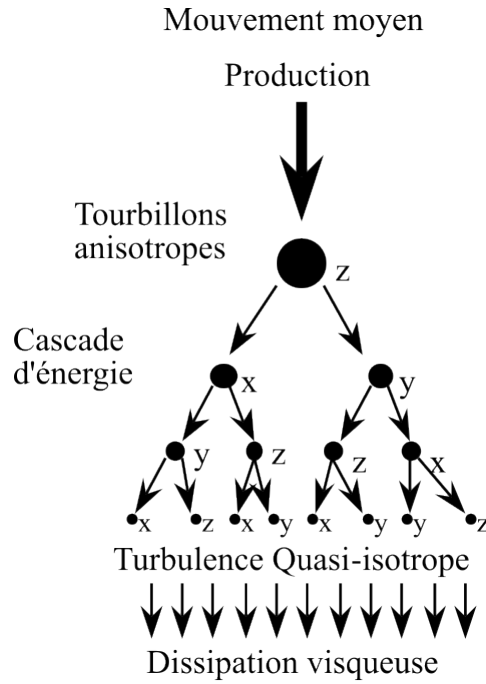


Figure 4.6 – Concept de cascade d'énergie- Tendance à l'isotropie de la microturbulence

Au cours de ce processus en cascade, les petits tourbillons tendent à se libérer des caractéristiques anisotropes des plus gros tourbillons, et la microturbulence s'approche de l'isotropie. En effet, et suivant le mécanisme développé par Tennekes et Lumley, une structure soumise au phénomène d'étirement tourbillonnaire dans une direction  $z$  par exemple de l'écoulement, donnera naissance à des structures plus petites en intensifiant le mouvement dans les directions complémentaires  $x$  et  $y$ . Ainsi, les petits tourbillons, qui reçoivent l'énergie non pas directement du mouvement moyen mais par une chaîne de transferts d'énergie cinétique turbulente, s'affranchissent des conditions extérieures qui ont produit les gros tourbillons initiaux, et tendent vers un comportement isotrope.

Cette cascade d'énergie peut être formalisée en introduisant le nombre d'onde  $\kappa = 2\pi/\lambda$  ( $\text{m}^{-1}$ ), où  $\lambda$  désigne la longueur d'onde des tourbillons. Un exemple de spectre d'énergie est donné sur la figure 4.7, pour un écoulement turbulent généré par une grille. Ce diagramme montre que l'énergie cinétique (énergie par unité de masse et par unité de nombre d'onde) est maximale pour les faibles nombres d'onde, correspondant aux plus gros tourbillons. Ces derniers ont acquis leur énergie à travers les interactions avec l'écoulement moyen. Cette valeur de  $E(\kappa)$  décroît rapidement avec l'augmentation du nombre d'onde, et les plus petits tourbillons possèdent l'énergie la plus faible. Typiquement pour les écoulements observés en ingénierie, les plus petits tourbillons ont une échelle de longueur de l'ordre de 10 à 100  $\mu\text{m}$  pour une fréquence autour de 10 kHz  $f = \bar{u}/\lambda$

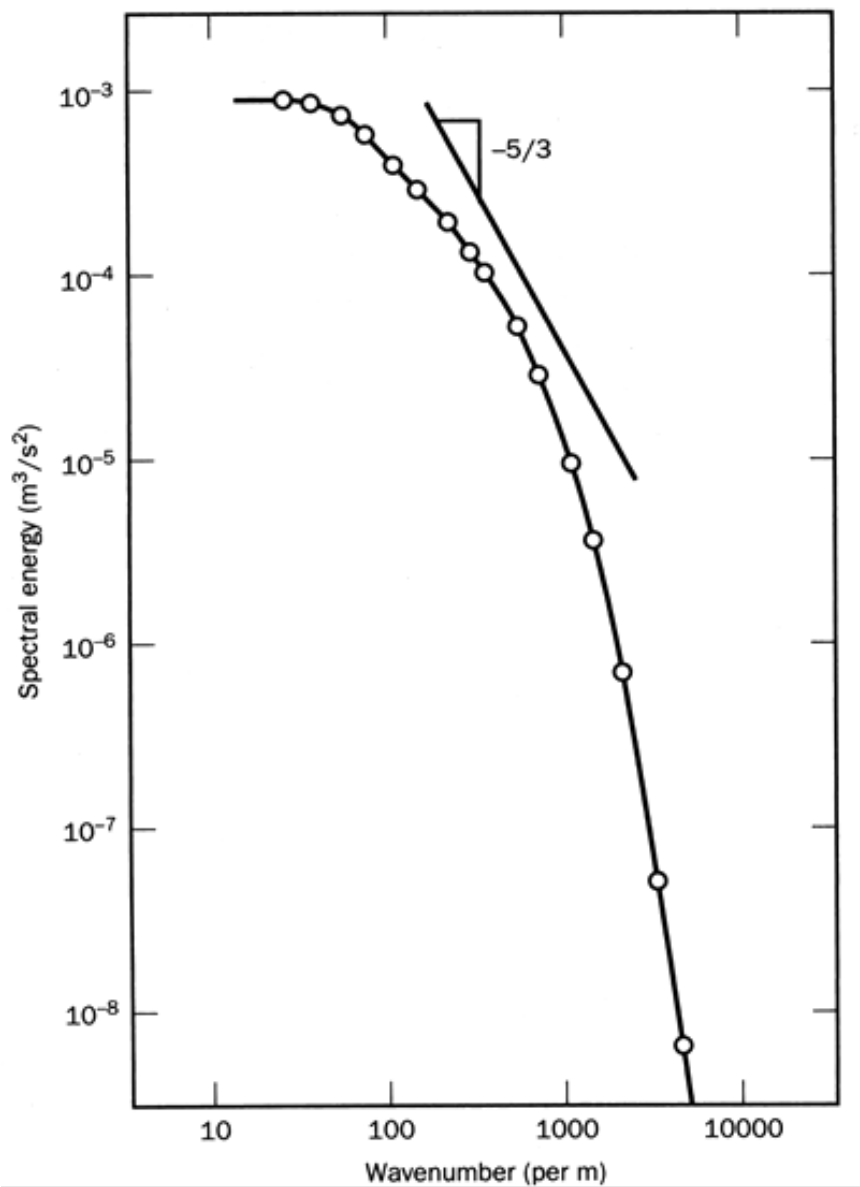


Figure 4.7 – Spectre d'énergie de turbulence derrière une grille [Malalasekera]

La plus petite échelle de tourbillon a pris pour nom celui de Kolmogorov, et on a coutume de noter  $\eta$  l'échelle de longueur et  $v$  sa vitesse caractéristique. Pour ces tourbillons, les effets d'inertie équilibrent la dissipation visqueuse, et on a :

$$Re_{\eta} = \frac{\rho v \eta}{\mu} = 1 \quad (4.1)$$

Une analyse dimensionnelle peut être menée pour fournir les rapports en échelle de longueur, temps et vitesse entre les structures turbulentes de Kolmogorov ( $\eta, \tau, v$ ) et les plus gros tourbillons ( $l, t, V$ ).

$$\begin{aligned}\frac{\eta}{l} &\approx Re_l^{-3/4} \\ \frac{\tau}{t} &\approx Re_l^{-1/2} \\ \frac{v}{V} &\approx Re_l^{-1/4}\end{aligned} \quad \text{avec} \quad Re_l = \frac{\rho V l}{\mu} \quad (\text{typiquement compris entre } 10^3 \text{ et } 10^6) \quad (4.2)$$

### 4.3 Condition d'existence des régimes laminaire et turbulent

Les études effectuées par Reynolds l'ont conduit à montrer que le nombre sans dimension  $Re = ud/\nu$ , appelé depuis nombre de Reynolds et qui représente le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité, permettait de prévoir le type d'écoulement. La transition entre écoulement laminaire et turbulent dans un tube s'effectue pour un nombre de Reynolds critique  $Re_{cr} = 2100$  (valeur qui peut varier avec la rugosité de la paroi). Cette valeur critique pour une conduite n'est pas universelle (!! ) mais diffère suivant la configuration. Ainsi pour les écoulements dits libres, comme les jets et les sillages, les nombres de  $Re_{cr}$  sont petits, alors que pour les écoulements à proximité des parois, comme les conduites ou les canaux, ils ont des valeurs plus élevées.

Le régime de l'écoulement n'est pas toujours sous l'unique dépendance du nombre de Reynolds, et d'autres paramètres sans dimension sont à considérer. Ainsi, pour les écoulements supersoniques, la transition varie quelque peu avec le nombre de Mach. Des valeurs plus élevées du nombre de Reynolds critique sont nécessaires pour provoquer la transition aux grands nombres de Mach. L'apparition de la turbulence peut être influencée par d'autres facteurs dynamiques, et en particulier les forces d'Archimède responsables de la turbulence atmosphérique et de nombreux écoulements dans des machines ou procédés industriels. Le paramètre à considérer est alors le nombre de Grashof :

$$Gr = \beta g \Delta T \frac{L^3}{\nu^2} \quad (4.3)$$

où  $\beta$  est le coefficient d'expansion thermique,  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $\Delta T$  la différence de température et  $L$  une dimension caractéristique du système. Le nombre de Grashof critique est de l'ordre de  $3 \cdot 10^8 - 10^9$ .

Afin de fixer les idées, faisons l'application numérique pour deux configurations classiques. Pour une conduite cylindrique de diamètre  $d = 0,1$  m dans laquelle circule de l'eau, le nombre  $Re_{cr}$  sera atteint pour :

$$u = Re_{cr} \frac{\nu}{d} = 2,1 \cdot 10^{-2} \text{ m/s} \quad (4.4)$$

Considérons maintenant une cavité cubique de un mètre de côté contenant de l'eau. Le mouvement de convection thermique naturelle sera de type turbulent, si le gradient thermique entre les deux parois dépasse :  $\Delta T = Gr_{cr} \cdot \nu^2 / (\beta g L^3) = 1^\circ \text{C}$

Ces deux exemples suffisent à montrer que les valeurs critiques sont le plus souvent dépassées dans les phénomènes géophysiques et les applications industrielles. Les mécaniciens des fluides considèrent ainsi que l'écoulement turbulent est de règle, alors que l'écoulement laminaire est un cas limite. Il faut cependant nuancer ce point de vue ; dans certains

secteurs industriels comme l'élaboration des matériaux, les mouvements des fluides sont parfois suffisamment lents pour limiter l'écoulement au régime laminaire.

## 4.4 Approche déterministe et approche statistique

La prédominance de la nature turbulente des écoulements et le rôle déterminant joué par la turbulence dans le transport de la chaleur et de la matière ont motivé depuis plus d'un quart de siècle la communauté scientifique à travailler dans cette discipline difficile, qui s'enrichit sans cesse de concepts nouveaux. Afin d'éclairer le lecteur face à la multitude de théories et de modèles développés, deux approches, l'une déterministe, l'autre statistique peuvent être distinguées tout d'abord.

**Résolution numérique directe ("Direct Numerical Simulation", DNS)** Le mouvement instantané détaillé du fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes, puisque, même pour les plus petites échelles de turbulence, les agrégats de fluides demeurent un continuum par rapport à l'échelle moléculaire. L'étude de tout écoulement pourrait donc se faire, du moins en principe, par résolution directe numérique des équations de Navier-Stokes. On montre toutefois que le nombre de points de discrétisation en temps et en espace nécessaires pour représenter les plus petites échelles de la turbulence atteint des valeurs énormes. Cette approche directe fait appel à de puissants moyens informatiques, et ne peut être conduite actuellement que sur des écoulements en géométrie relativement simple, pour des nombres de Reynolds peu élevés. La résolution directe des équations de Navier-Stokes reste donc réservée à des études fondamentales sur la turbulence et n'est pas abordable dans la pratique industrielle, tout au moins dans un futur proche. De plus, ces simulations ne sont pas exemptes d'imprécision dans le schéma numérique (lié à la non-linéarité des équations de Navier-Stokes), et manquent d'informations sur les conditions aux frontières promoteurs de turbulence. Afin de tenir compte de l'imprédictibilité des conditions initiales et aux limites responsable du caractère aléatoire de la turbulence, une solution très coûteuse en temps d'exploitation consiste à faire un calcul direct du mouvement turbulent pour plusieurs réalisations avec des conditions aux limites aléatoires, et faire ensuite un traitement statistique des résultats obtenus.

**Résolution des équations moyennées ("Reynolds-Averaged Navier Stokes", RANS)** Devant l'aspect aléatoire des fluctuations des grandeurs telles que la vitesse déjà présentée sur la figure 4.4, l'attitude la plus naturelle et la plus pratiquée a été d'introduire des méthodes statistiques. En effet nous avons vu que le hasard apparent des évolutions turbulentes a son origine dans le caractère imprédictible des conditions initiales et aux limites, pour lesquelles une très petite variation bouleverse totalement la structure détaillée de l'écoulement. La méthode statistique est donc justifiée par l'ignorance des causes surabondantes et difficilement accessibles. Cette approche, présentée dans la suite du chapitre, fournit des outils à l'ingénieur pour prendre en compte la turbulence dans les phénomènes de transport.

**Combinaison DNS-RANS ("Large Eddy Simulation")** Notons qu'il existe une technique de calcul intermédiaire établissant le lien entre le calcul direct et l'approche statistique. La méthode (Large-Eddy-Simulation LES) consiste à simuler numériquement seulement les grosses structures turbulentes (celles qui sont dépendantes de la géométrie du domaine et anisotropes) et à modéliser les plus petites structures (où la turbulence est isotrope et plus universelle).

## 4.5 Analyse spectrale

La description statistique de la turbulence est une vaste entreprise, puisqu'il s'agit d'analyser les fluctuations, a priori chaotique, d'un grand nombre de variables (les trois coordonnées de la vitesse, la température, la pression, les titres massiques ...) dans un domaine à quatre dimensions espace et temps. Face à la complexité du problème, nous nous limiterons à la description des fluctuations d'une coordonnée du vecteur vitesse soit en un point en fonction du temps, soit à un instant donné en fonction d'une coordonnée d'espace. Le lecteur doit cependant garder à l'esprit le fait que cette présentation n'est qu'une introduction au vaste champ d'exploitation ouvert par les spécialistes de la turbulence.

### 4.5.1 Fluctuations de la vitesse dans le temps

Si l'on reprend l'enregistrement en un point d'une des coordonnées du vecteur vitesse en fonction du temps (figure 4.8), on peut définir une valeur moyenne sur un intervalle de temps  $t_0$  suffisamment grand en comparaison avec la fréquence des oscillations.

$$\overline{v_x} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} v_x(t) dt \quad (4.5)$$

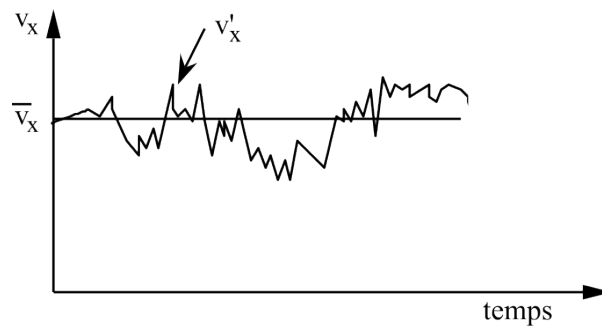


Figure 4.8 – Vitesse moyenne et vitesse fluctuante

La vitesse instantanée  $v_x$  peut se décomposer en la somme de la vitesse moyenne dans le temps  $\overline{v_x}$  et de la composante fluctuante  $v'_x$ .

$$v_x = \overline{v_x} + v'_x \quad (4.6)$$

La généralisation de cette notion conduit à représenter toute variable  $V$  potentiel d'un champ (température, pression, titre massique ...) sous la forme :

$$V = \overline{V} + V' \quad (4.7)$$

Par définition :

$$\overline{V'} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} V' dt = 0 \quad (4.8)$$

mais par contre :

$$\overline{V'^2} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} V'^2 dt \neq 0 \quad (4.9)$$

### 4.5.2 Fluctuations de la vitesse dans l'espace - Échelle de Taylor

Reportons maintenant la composante fluctuante d'une des coordonnées de la vitesse  $v_x$  à un instant donné le long d'une ligne de courant. L'enregistrement obtenu, schématisé sur la figure 4.9, a le mérite de mettre en évidence, bien que grossièrement, la dimension et le nombre de tourbillons.

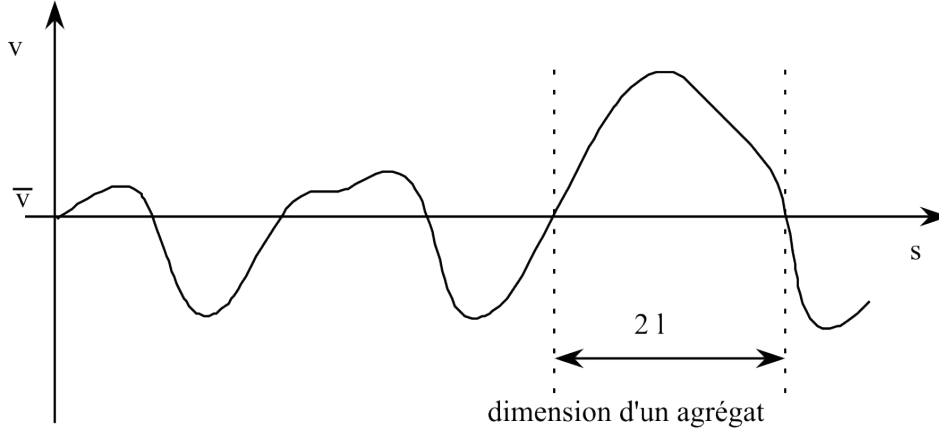


Figure 4.9 – Enregistrement le long d'une ligne de courant moyenne  $s$  ( $\bar{v} = \text{cte}$ ) de la vitesse à un instant donné

Il n'est cependant pas possible de définir directement la taille des tourbillons, comme la longueur d'onde d'une oscillation par exemple. L'échelle de Taylor est basée sur une opération de corrélation statistique, analogue à une moyenne temporelle, qui conduit à la définition de la corrélation double :

$$R_{xx} = \frac{\overline{(v'_x)_o (v'_x)_r}}{\left[ \overline{(v_x'^2)_o} \right]^{1/2} \left[ \overline{(v_x'^2)_r} \right]^{1/2}} \quad (4.10)$$

La corrélation double  $R_{xx}$  exprime la similitude des fluctuations turbulentes en deux points  $A$  et  $B$  séparés par une distance  $r$ , et correspond à une probabilité de présence de tourbillon.  $R_{xx}$  décroît très rapidement en fonction de la distance  $r$  car les fluctuations turbulentes sont peu corrélées au-delà de la dimension de l'agrégat de fluide associé aux tourbillons.  $R_{xx}$  tend vers zéro lorsque  $r$  augmente (c'est à dire  $\overline{(v'_x)_o (v'_x)_r} \rightarrow 0$ ). Cette décroissance est représentée sur la figure 4.10.

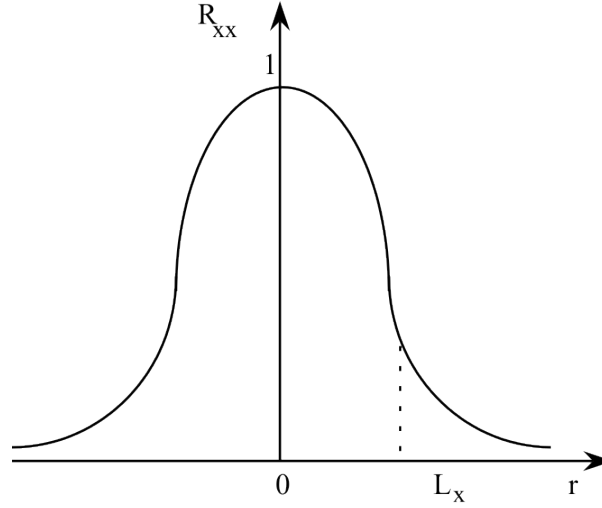


Figure 4.10 – Coefficient de corrélation double en deux points en fonction de la distance  $r$  entre les deux points

À l’opposé, si  $r$  est suffisamment petit, les deux points  $A$  et  $B$  appartiennent au même agrégat et  $R_{xx} = 1$  ( $(v'_x)_o = (v'_x)_r$ ).

Taylor a ainsi défini l’échelle de la macroturbulence à partir de la trace du tenseur des corrélations par :

$$\begin{aligned} L_x &= \int_0^\infty R_{xx} dx \\ L_y &= \int_0^\infty R_{yy} dy \\ L_z &= \int_0^\infty R_{zz} dz \end{aligned} \tag{4.11}$$

Cette échelle, qui a la dimension d’une longueur, correspond aux plus gros tourbillons observables, qui sont le plus souvent liés à la géométrie du promoteur de turbulence.

## 4.6 Moyennes statistiques des équations de transport

La description de la turbulence a été abordée au paragraphe précédent par une analyse spectrale, sans utiliser les équations de transport aux dérivées partielles qui régissent l’écoulement turbulent et le transport turbulent des différentes extensités. C’est ainsi que les moyennes statistiques des équations de transport (moment d’ordre 1, d’ordre 2 ou supérieur) restent aujourd’hui les plus utilisées (et les plus prometteuses) pour décrire les mécanismes de transport dans un écoulement turbulent.

Calculons la moyenne temporelle (moment d’ordre 1) de l’équation de continuité, des équations de Navier-Stokes et de l’équation de transport d’un scalaire, en mettant à profit la décomposition des grandeurs instantanées en grandeurs moyennes et fluctuantes (équation (4.7)). Ce calcul est limité au cas des fluides incompressibles.

#### 4.6.1 Équation de continuité

L'équation de continuité s'écrit, pour un fluide incompressible :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.12)$$

soit, en appliquant la décomposition représentée par (4.7) :

$$\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v} + v')}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{w} + w')}{\partial z} = 0 \quad (4.13)$$

En moyennant l'équation (4.13), on obtient :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (4.14)$$

L'équation de continuité s'exprime de la même manière pour un écoulement laminaire et pour un écoulement turbulent si on ne tient compte que des vitesses moyennes.

Remarquons qu'en soustrayant (4.14) de (4.13), on obtient immédiatement :

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (4.15)$$

#### 4.6.2 Équations de Navier-Stokes

L'équation de Navier-Stokes, selon la coordonnée  $x$ , s'écrit :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} u \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + F_x + \mu \nabla^2 u \quad (4.16)$$

ou bien

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + F_x + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (4.17)$$

En appliquant la décomposition (4.7) à l'équation (4.17), on obtient après moyennage :

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\overline{\partial u'^2}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\overline{\partial u' v'}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\overline{\partial u' w'}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + F_x + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) \quad (4.18)$$

Il apparaît dans l'équation (4.18) des termes supplémentaires, liés aux corrélations doubles  $u'u'$ ,  $u'v'$ ,  $u'w'$ , exprimant l'influence de la turbulence.

En reprenant la forme vectorielle (4.16), l'équation des vitesses moyennes (selon  $x$ ) peut également s'écrire :

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \bar{u} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + F_x + \mu \nabla^2 \bar{u} + \rho \left( \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right) \quad (4.19)$$

— et de même pour les composantes  $v$  et  $w$ .

Les corrélations doubles apparaissant dans l'équation (4.19) peuvent être regroupées sous la forme d'un tenseur (symétrique) des contraintes de Reynolds :

$$\tau = \rho \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

La trace de ce tenseur correspond au double de l'énergie cinétique turbulente  $k$  :

$$k = \frac{1}{2} \rho \left( \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right) \quad (4.21)$$

### 4.6.3 Équation de transport d'un scalaire

L'équation de transport d'un scalaire  $\rho_Y$  est donnée par :

$$\frac{\partial \rho_Y}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho_Y = \vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla} \rho_Y) \quad (4.22)$$

ou, en appliquant la décomposition (4.7) et en moyennant :

$$\frac{\partial \overline{\rho_Y}}{\partial t} + \vec{\bar{v}} \cdot \vec{\nabla} \overline{\rho_Y} = \vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla} \overline{\rho_Y}) - \vec{\nabla} \cdot \overline{\rho'_Y \vec{v}'} \quad (4.23)$$

Cette dernière équation contient le terme  $\overline{\rho'_Y \vec{v}'}$ , qui représente le flux turbulent de scalaire, et qui est donc inconnu. Le problème est le même que celui rencontré pour les équations de Navier-Stokes : le système d'équations moyennées n'est pas fermé.

## 4.7 Notion de viscosité turbulente

Une manière simple de fermer le système consiste à utiliser l'hypothèse de Boussinesq, qui assimile la turbulence à une viscosité additionnelle, dite viscosité turbulente  $\mu_t$ , et conduit à la relation :

$$\overline{\rho u'v'} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (4.24)$$

L'équation de Navier-Stokes moyennée (4.19) devient alors :

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \bar{u} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + F_x + \vec{\nabla} \cdot [(\mu + \mu_t) \vec{\nabla} \bar{u}] \quad (4.25)$$

Notons que  $\mu_t$  est une variable, contrairement à la viscosité moléculaire  $\mu$ . De nombreux modèles existent pour déterminer  $\mu_t$ . Nous allons présenter deux approches : la théorie de Prandtl, qui ne nécessite pas d'équations supplémentaires, et le modèle  $k-\varepsilon$ , qui introduit deux équations additionnelles.

## 4.8 Théorie de longueur de mélange de Prandtl. Profil universel des vitesses

### 4.8.1 Théorie de Prandtl

Considérons un écoulement turbulent 1-D à proximité d'une paroi solide (figure 4.11). Dans ce cas, les contraintes turbulentes dominantes sont celles associées au cisaillement  $\overline{u'v'}$ . Prandtl a proposé de modéliser cette contrainte par :

$$\tau = \rho \overline{u'v'} = -\rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (4.26)$$

La viscosité turbulente associée est alors :

$$\mu_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (4.27)$$

où  $l$  est appelée longueur de mélange de Prandtl. Prandtl propose de plus, en première approximation,  $l = Ky$  où  $K$  est la constante de Von Karman :

$$l = Ky \quad (4.28)$$

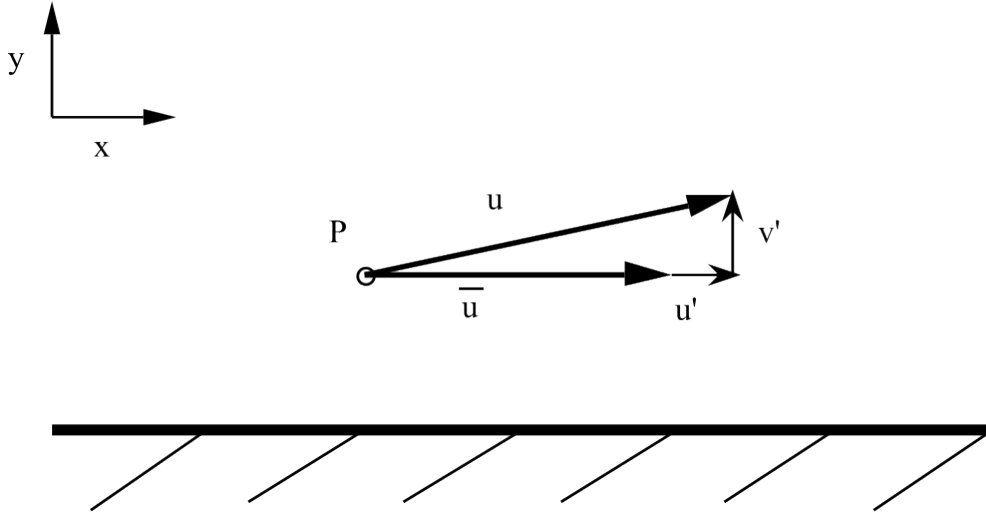


Figure 4.11 – Écoulement turbulent 1-D près d'une paroi solide. La théorie de longueur de mélange

### 4.8.2 Profil logarithmique des vitesses

En intégrant l'équation (4.26) dans le cas d'un écoulement pleinement développé, on obtient :

$$\tau = -\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \text{Cte} \quad (4.29)$$

Dans la zone où la viscosité moléculaire est négligeable devant la turbulence ( $\mu \ll \mu_t$ ), en utilisant (4.28), on obtient :

$$Ky \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| = \sqrt{\frac{|\tau|}{\rho}} \quad (4.30)$$

On introduit alors les variables adimensionnelles usuelles :

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{\sqrt{|\tau|/\rho}} \quad \text{et} \quad y^+ = \frac{y \sqrt{|\tau| \rho}}{\mu} \quad (4.31)$$

et l'intégration conduit au profil logarithmique :

$$u^+ = \frac{1}{K} \text{Log } y^+ + B \quad (4.32)$$

ou bien :

$$u^+ = \frac{1}{K} \text{Log}(E y^+)$$

où  $B$  est une constante d'intégration, et  $E$  une constante équivalente.

Cette loi logarithmique est valable dans la zone  $30 < y^+ < 300$  (figure 4.12). On peut ainsi écrire :

$$u^+ = 2,5 \text{ Log } y^+ + 5,5 \quad (4.33)$$

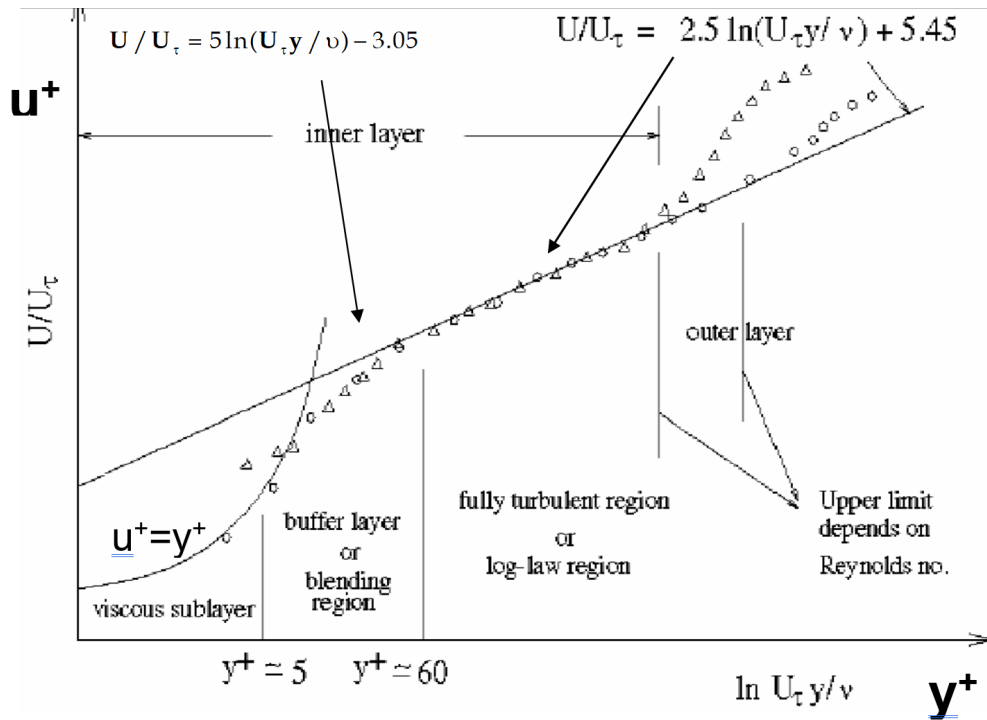


Figure 4.12 – Profil universel des vitesses près d’une paroi solide. Domaine de validité de la loi logarithmique

**Remarque :** En reportant (4.29) dans (4.30), on trouve la viscosité effective :

$$\left| \frac{\tau}{\partial \bar{u} / \partial y} \right| = \mu$$

mais par contre, en zone logarithmique,  $\mu_t \gg \mu$  et on trouve :

$$\left| \frac{\tau}{\partial \bar{u} / \partial y} \right| = \frac{\mu}{\partial u^+ / \partial y^+} = K y^+ \mu = 4,6 \mu !!$$

Ainsi, le profil “universel” est caractérisé par la réunion de trois lois différentes :

- 1) Sous couche limite laminaire :  $0 \leq y^+ \leq 5, \quad u^+ = y^+$
  - 2) Zone tampon :  $5 \leq y^+ \leq 30, \quad u^+ = 5 \ln y^+ - 3,05$
  - 3) Couche en loi logarithmique :  $30 \leq y^+ \leq 300, \quad u^+ = 2,5 \ln y^+ + 5,5$
- (4.34)

## 4.9 Énergie cinétique turbulente. Modèle de Kolmogorov

L’idée de Kolmogorov consiste à relier la viscosité turbulente  $\mu_t$  à deux grandeurs caractéristiques : la vitesse turbulente (associée à l’énergie cinétique turbulente) et une échelle de longueur  $L$ . On pose :

$$\mu_t = \rho \sqrt{k} L \quad (4.35)$$

où  $k$  est l'énergie cinétique turbulente par unité de masse, définie par :

$$k = \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2 + w'^2) \quad (4.36)$$

et  $K$  est l'énergie cinétique moyenne par unité de masse, définie par :

$$K = \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)$$

Dans le cas d'une turbulence isotrope, on a de plus :  $\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2}$ .

Le problème consiste alors à déterminer  $k$  et  $L$ . Trois étapes sont nécessaires :

- (a) établir une équation de transport pour  $k$ ,
- (b) introduire un modèle pour l'échelle  $L$ ,
- (c) fermer le modèle de diffusion turbulent.

L'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente  $k$  (en 2D) s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k}{\partial y} \right) &= \mu \left( \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} \right) \\ \text{T} \quad &- \rho \left( \frac{\partial \overline{u'k'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'k'}}{\partial y} \right) \\ \text{P} \quad &- \rho \left( \overline{u'^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{v'u'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \overline{v'^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \\ \text{D} \quad &- \mu \left[ \left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

où  $k'$  est l'énergie cinétique turbulente instantanée ( $k' = (u'^2 + v'^2 + w'^2)/2$ )

$T$  est le terme de transport turbulent,  $P$  le terme de production,  $D$  le terme de dissipation.

Le modèle de Kolmogorov conduit à :

$$T = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) \quad (4.38)$$

$$P = \mu_t \left[ 2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (4.39)$$

$$D = -\rho \varepsilon \quad (4.40)$$

$$\varepsilon = C_\mu \frac{k^{3/2}}{L} \quad (4.41)$$

et l'équation de transport de  $k$  devient :

$$\rho \left( \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + P - \rho C_\mu \frac{k^{3/2}}{L} \quad (4.42)$$

En régime permanent, à proximité d'une paroi, on a  $P = \rho C_\mu k^{3/2}/L$

$$P = \rho C_\mu \frac{k^{3/2}}{L} \quad (4.43)$$

or, dans une couche limite 1D :

$$P = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (4.44)$$

En combinant (4.35), (4.43) et (4.44), on obtient :

$$\mu_t = \rho \frac{L^2}{\sqrt{C_\mu}} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (4.45)$$

et, en comparant avec l'expression de Prandtl (4.27), on en déduit :

$$L = l C_\mu^{1/4} \quad (4.46)$$

et donc :

$$L = K C_\mu^{1/4} y \quad (4.47)$$

## 4.10 Le modèle $k$ - $\varepsilon$

Le modèle  $k$ - $\varepsilon$  repose sur le couplage de l'équation de transport de  $k$  (4.42) et d'une équation de transport de  $\varepsilon$  :

$$\rho \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + \frac{\varepsilon}{k} (C_1 P - C_2 \rho \varepsilon) \quad (4.48)$$

avec :

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (4.49)$$

Les constantes sont :  $C_\mu = 0,09$  ;  $\sigma_k = 1$  ;  $\sigma_\varepsilon = 1,3$  ;  $C_1 = 1,44$  ;  $C_2 = 1,92$ .

Dans un calcul de champs de vitesse et de température, il faut donc résoudre :

- les équations de Navier-Stokes moyennées,
- l'équation de continuité,
- l'équation de transport de  $k$ ,

- l'équation de transport de  $\varepsilon$ ,
- l'équation de transport de l'énergie (ou de la température)

On constate que ce modèle nécessite de résoudre un système de 5 équations non linéaires, ce qui représente un problème numérique non trivial. La résolution numérique requiert une discrétisation spatiale et temporelle de ces équations, puis une technique de linéarisation et de couplage.

## 4.11 Conditions aux limites

La résolution des équations de transport nécessite des conditions aux limites. Dans le cas du modèle  $k$ - $\varepsilon$ , la difficulté principale se situe au voisinage des parois. Deux approches principales existent : les fonctions de paroi et les doubles couches limites.

### 4.11.1 Fonctions de paroi

Pour un écoulement au voisinage d'une paroi, les gradients sont très importants et les effets visqueux peuvent être prépondérants. Un maillage suffisamment fin pour résoudre explicitement la sous-couche limite visqueuse serait très coûteux. Une approche classique consiste à utiliser des "fonctions de paroi", qui imposent des conditions aux limites au premier point de maillage, situé à une distance  $y$  de la paroi.

Dans le modèle  $k$ - $\varepsilon$ , deux types de conditions ont été proposés :

- Condition de Neumann :

$$\frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0 \quad (4.50)$$

- Condition de Dirichlet :

$$k = \varepsilon = 0 \quad (4.51)$$

La condition de Neumann est plus souvent utilisée que la condition de Dirichlet.

Le calcul des fonctions de paroi nécessite la connaissance du flux de  $k$  au voisinage de la paroi. Celui-ci est imposé par :

$$\phi_s = - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{0 - k_p}{y} \quad (4.52)$$

On applique ensuite la loi logarithmique :

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{|\tau|/\rho}} = \frac{1}{K} \text{Log} \left( \frac{y \sqrt{|\tau|/\rho}}{\mu} \right) + B \quad (4.53)$$

On obtient alors :

$$k = \frac{L^2}{C_\mu} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (4.54)$$

$$k_p = \frac{|\tau|}{\rho \sqrt{C_\mu}} \quad (4.55)$$

$$\varepsilon_P = -\frac{C_\mu^{3/4} k_P^{3/2}}{K y} \quad (4.56)$$

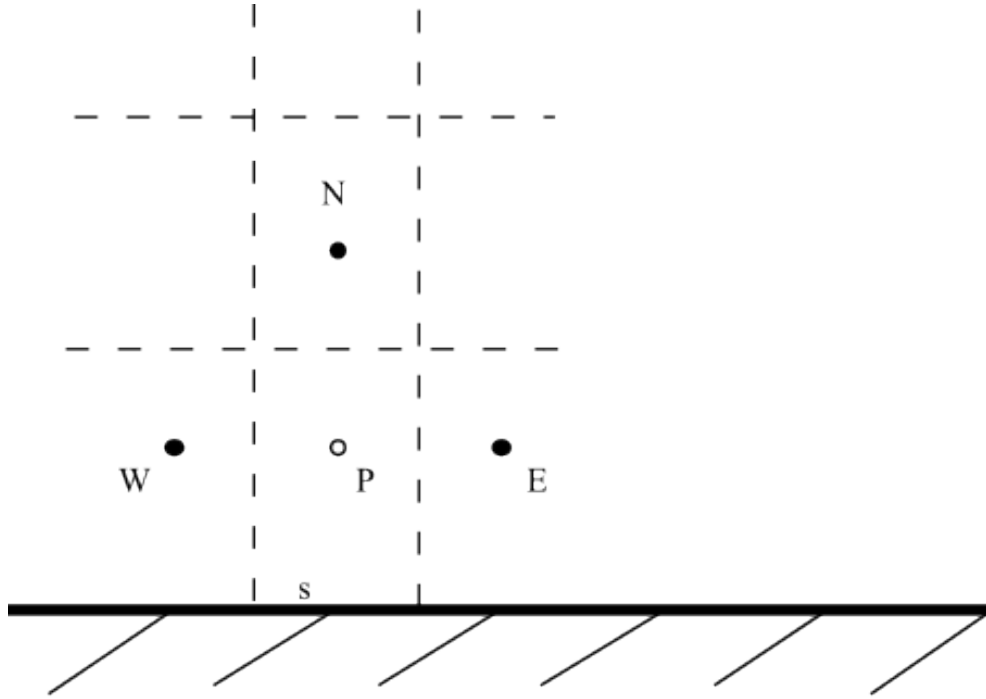


Figure 4.13 – Détail du maillage près d’une paroi

Il est intéressant de noter que la combinaison des équations (4.49), (4.55) et (4.56) permet bien de retrouver la viscosité turbulente  $\mu_t = K y^+ \mu$ . La condition  $y^+ \geq 30$  correspond alors à  $\mu_t/\mu \geq 12$ , qui définit bien la région à partir de laquelle l’influence du frottement visqueux sur les transports devient négligeable.

Les équations (4.53), (4.55) et (4.56) constituent les fonctions de paroi associées au modèle  $k-\varepsilon$ . Elles s’appliquent uniquement pour les points du maillage situés immédiatement au voisinage d’une paroi solide. On peut estimer qu’il est quelque peu choquant de traiter ces points d’une manière si différente des autres points du maillage, plus éloignés des parois. Aucune latitude n’est en effet permise pour un “recoupement” des domaines :

- modèle  $k-\varepsilon$  (turbulence isotrope)
- profil logarithmique des vitesses (écoulement de couche limite)

Pour cette raison, les fonctions de paroi (4.53) et (4.55) sont parfois remplacées par des équations plus complexes qui tiennent mieux compte de l’influence de la turbulence de l’écoulement loin des parois.

#### 4.11.2 Double couches limites

Cette approche est plus précise et plus simple mais plus coûteuse en temps de calcul puisqu’elle consiste à positionner le premier point du maillage dans la sous-couche limite laminaire ( $y^+$  proche de 1). Dans la pratique, à partir d’un premier calcul avec un maillage relativement grossier, on calcule  $y^+$  au premier point de maillage. Le maillage est alors affiné en conséquence, et le calcul est à nouveau effectué. L’ensemble de la démarche est répétée jusqu’à obtenir en tous points de la surface  $y^+$  proche de 1.

## Bibliographie

- H. Tennekes, J.L. Lumley, "A first course in turbulence", MIT Press, Cambridge, 1972.
- M. Lesieur, "Turbulence in fluids", Martinus Nijhoff Publ., 1987.
- A. Favre, "La turbulence en mécanique des fluides", Gauthier-Villars, 1976.
- R. Schiestel, "Modélisation et simulation des écoulements turbulents", Hermes, 1993.
- J. Cousteix, "Turbulence et couche limite", Cepadues Edi., 1989.
- N. Midoux, "Mécanique et rhéologie des fluides", Tec Doc Lavoisier, 1985.
- H. Schlichting, "Boundary layer theory", 7th edn, Mc Graw-Hill, New York, 1979.