

MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS (MMC)

Enquête sur l'explosion des gazoducs Nord Stream

Les gazoducs Nord Stream 1 et Nord Stream 2 ont fait l'objet d'explosions en mer Baltique le 26 septembre 2022, provoquant d'énormes fuites de méthane (un puissant gaz à effet de serre). Dès le lendemain, l'hypothèse de l'accident était écartée, dans un contexte de conflits sur le gaz entre l'Union Européenne et la Russie. On se pose néanmoins la question dans ce problème : **comment le gazoduc a-t-il été conçu, et comment écarter la thèse accidentelle?**



Figure 1 : gazoducs Nord Stream reliant la Russie et l'Allemagne

Les conduites qui constituent les gazoducs sont constituées de **deux matériaux principaux** : un matériau noté (1) à l'intérieur de la conduite, en acier afin de résister aux contraintes liées à la pression interne, et un matériau noté (2) à l'extérieur de la conduite, en béton afin de compenser la poussée d'Archimède et d'augmenter la profondeur à laquelle est placé le gazoduc. Il existe un léger jeu entre ces deux matériaux, permettant de s'assurer que le béton n'est pas sollicité en traction lors de la mise en pression du gazoduc (on sait en effet que le béton résiste très peu à la traction, mais très bien à la compression).

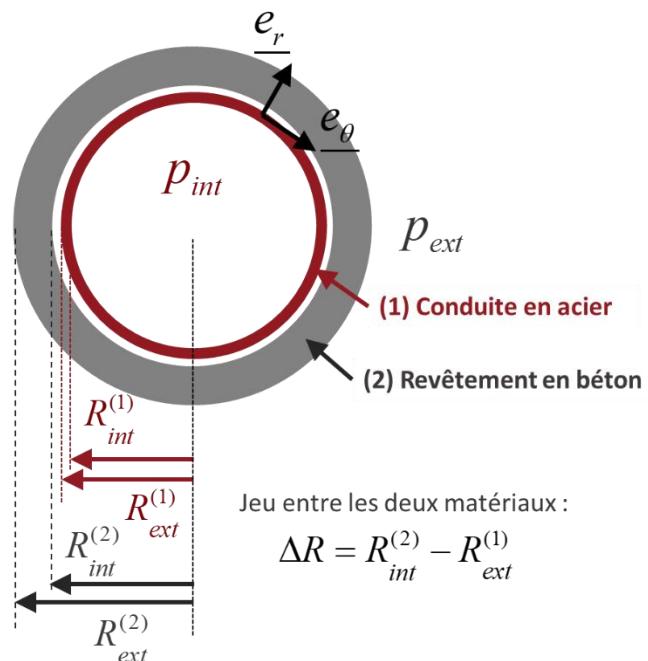


Figure 2: composition des conduites des gazoducs Nord Stream 1 et 2

Propriétés mécaniques du béton	$R_e^{beton} = 35 \text{ MPa}$ en compression $R_e^{beton} = 5 \text{ MPa}$ en traction
Limite élastique de l'acier	$R_e^{acier} = 240 \text{ MPa}$
Profondeur du gazoduc sous la surface de la mer Baltique	$h = 100 \text{ m}$
Pression d'usage du gazoduc	$P = 200 \text{ bars}$
Diamètre extérieur de la conduite	$D = 1 \text{ m}$
Épaisseur du revêtement en béton	$e^{beton} = 0.3 \text{ m}$
Épaisseur de la conduite en acier	$e^{acier} = 0.05 \text{ m}$

Hypothèses

- On considère dans toute la suite que le problème est indépendant de θ et de z
- Les deux matériaux sont élastiques linéaires isotropes

Problème posé

Quel jeu minimal $\Delta R = R_{int}^{(2)} - R_{ext}^{(1)}$ doit-il exister entre les deux matériaux ?

1. A l'intérieur de la conduite (rayon $R_{int}^{(1)}$), la surface est soumise à la pression externe p_{int} . Traduire cette condition aux limites en ce qui concerne le vecteur-contrainte $\underline{t}^{(1)}$ au sein du matériau (1) puis certaines composantes du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}$ en $r = R_{int}^{(1)}$. (/1)

2. Dans l'espace interstitiel entre les deux matériaux, on fait l'hypothèse que la pression p est très proche de la pression extérieure p_{ext} , très inférieure et négligeable devant la pression intérieure p_{int} . Traduire cette condition aux limites en ce qui concerne le vecteur-contrainte $\underline{t}^{(1)}$ au sein du matériau (1) puis certaines composantes du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}$ en $r = R_{ext}^{(1)}$. (/1)

3. D'après les résultats précédents, on peut faire facilement les hypothèses que $-p_{int} \leq \sigma_{rr}^{(1)} \leq 0$ et que $\sigma_{r\theta}^{(1)}(r) = 0$ et $\sigma_{rz}^{(1)}(r) = 0$. On considère de plus que la composante $\sigma_{rr}^{(1)}(r)$ évolue linéairement au sein du matériau (1) : montrer qu'il prend alors la forme $\sigma_{rr}^{(1)}(r) = \frac{p_{int}}{R_{ext}^{(1)} - R_{int}^{(1)}} (r - R_{ext}^{(1)})$ (/1)

4. A partir de la question précédente et de l'équation d'équilibre montrer que l'on a :

$$\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r) = \frac{p_{int}}{R_{ext}^{(1)} - R_{int}^{(1)}} (2r - R_{ext}^{(1)}) \quad (/2)$$

5. Quels sont les signes de $\sigma_{rr}^{(1)}(r)$ et $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r)$? A quoi cela correspond-il physiquement ? (/1)

A ce stade de l'exercice, le tenseur des contraintes au sein de l'acier (matériau (1)) prend la forme suivante :

$$\left[\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}(r) \right] = \begin{pmatrix} -p_{int} \leq \sigma_{rr}^{(1)}(r) \leq 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r) & \sigma_{\theta z}(r) \\ 0 & \sigma_{z\theta}(r) & \sigma_{zz}(r) \end{pmatrix}$$

6. Compte tenu de la physique du problème, le champ de déplacement au sein du matériau (1) peut s'écrire : $\underline{u}^{(1)}(r) = u_r^{(1)}(r)$. Calcul le champ de déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)}(r)$ correspondant. (/2)

7. En considérant l'acier élastique linéaire isotrope, et à partir de la question précédente, déduire une nouvelle forme pour le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}(r)$ en fonction de $u_r^{(1)}(r)$. (/1)

8. Que peut-on dire désormais sur les composantes $\sigma_{\theta z}^{(1)}(r)$ et $\sigma_{z\theta}^{(1)}(r)$? (/1)

En utilisant une nouvelle fois l'équation d'équilibre à partir de cette nouvelle forme pour $\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}(r)$, on pourrait facilement écrire (comme dans les annales de 2016, 2018, 2019 et 2021 !) que le champ de déplacement $u_r^{(1)}(r)$ s'écrit sous la forme $u_r^{(1)}(r) = \frac{D}{r} + Cr$.

9. A partir des questions précédentes, déterminer (sans le résoudre) le système de 2 équations qui permettrait de trouver les deux constantes C et D en fonction des paramètres de Lamé du matériau (1) et de la pression intérieure p_{int} . (/1)

10. Un calcul d'ordre de grandeur pourrait facilement montrer que les composantes $\sigma_{rr}^{(1)}$ et $\sigma_{zz}^{(1)}$ sont négligeables devant $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$, de telle sorte que $\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}(r) \approx \sigma_{\theta\theta}^{(1)} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta$. A partir de la forme obtenue en question 4, calculer la contrainte équivalente de Von Mises. A quel endroit cette contrainte équivalente est-elle la plus importante ? (/1)

11. Quelle est la condition qui doit alors porter sur les rayons $R_{ext}^{(1)}$ et $R_{int}^{(1)}$ pour que la conduite ne soit pas endommagée lors de la mise sous pression ? (/1)

12. Calcul d'ordre de grandeur : que vaut la pression interne maximale admissible pour une conduite en acier, de diamètre extérieur égal à 1 mètre et d'épaisseur égale à 5 cm ? Est-ce compatible avec la pression d'usage du gazoduc ? (/1)

13. On s'intéresse désormais au revêtement en béton (matériau (2)). D'après le schéma ci-dessus, le tube en béton est soumis à la pression p_{ext} à l'extérieur comme à l'intérieur (au sein de l'espace interstitiel). En reprenant les questions 3,4 puis 9, montrer que le tenseur des contraintes est constant et que le champ de déplacement dans le béton s'écrit : $u_r^{(2)} = \frac{-p_{ext}}{2\lambda + 2\mu} r$ (/2)

14. On considère que les deux constantes C et D de la question 9 sont connues. On connaît donc le champ de déplacement dans les matériaux (1) et (2) lors de la mise en service du gazoduc. Quel est le jeu minimal $\Delta R = R_{int}^{(2)} - R_{ext}^{(1)}$ qui doit exister entre les deux matériaux pour éviter le contact, et ainsi éviter de solliciter le béton en traction ? (/1)

15. La paroi interne du gazoduc est évidemment soumise également à une contrainte de cisaillement qui provient des frottements du fluide contre la paroi. Comme dans le TD2, on peut facilement considérer que le champ de vitesses au sein de la conduite s'exprime sous la forme :

$$\underline{v} = v_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{\left(R_{\text{int}}^{(1)} \right)^2} \right) \underline{e}_z$$

Montrer que la contrainte de cisaillement (« tenseur des contraintes visqueuses $\underline{\underline{\tau}}$ », qui s'ajoute à la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}$ calculée précédemment) au niveau de la paroi s'écrit alors :

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = - \frac{2\eta v_{\max}}{R_{\text{int}}^{(1)}} \quad (\quad /2)$$

16. Vérifier que la contrainte calculée précédemment a bien la dimension d'une contrainte. (/1)

FORMULAIRE

Gradient d'un vecteur en coordonnées cylindriques :	$\underline{\underline{\text{grad } T}} = \frac{\partial T_r}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_r}{\partial \theta} - T_\theta \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_r}{\partial z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z +$ $\frac{\partial T_\theta}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + T_r \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_\theta}{\partial z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z +$ $\frac{\partial T_z}{\partial r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T_z}{\partial \theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_z}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$
Divergence d'un tenseur d'ordre 2 en coordonnées cylindriques :	$\underline{\underline{\text{div } T}} = \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} \right) \underline{e}_r +$ $\left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{\theta r} + T_{r\theta}) + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} \right) \underline{e}_\theta +$ $\left(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} T_{zr} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) \underline{e}_z$
Loi de comportement d'un fluide newtonien :	$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + 2\eta \underline{\underline{d}} \quad \text{avec } \eta \text{ la viscosité}$
Loi de Hooke :	$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{avec } \lambda, \mu \text{ les paramètres de Lamé}$
Loi de Hooke inverse :	$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}}$ avec E module d'Young, ν coefficient de Poisson
Equation d'équilibre :	$\underline{\underline{\text{div } \sigma}} + \rho (\underline{\underline{f}}^m - \underline{\underline{a}}) = \underline{\underline{0}}$
Tenseur des déformations :	$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\text{Grad } u}} + (\underline{\underline{\text{Grad } u}})^T)$
Tenseur vitesse de déformations :	$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left((\underline{\underline{\text{grad } v}})^T + \underline{\underline{\text{grad } v}} \right)$