

MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS (MMC) A propos du chantier du futur trolleybus du Grand Nancy

En tant qu'étudiant à l'ENSEM en 2023-2024, vous devez cohabiter avec les travaux qui vont permettre la circulation du futur trolleybus. Ces travaux impliquent notamment la mise en place de *radiers* (ou dalles) en béton, qui sont réalisés par tronçons, et doivent être séparés par des joints souples qui permettent à la fois la dilatation du béton lors de changements de température, et à la fois de légères déformations lors du passage du trolleybus. Dans ce sujet d'examen, **on cherche à déterminer les conditions de bon fonctionnement de ces joints souples** pour éviter la fissuration en service des radiers en béton.



Figure 1 : exemple de travaux avant la coulée du radier en béton

- Lors du passage d'un trolleybus, le béton se déforme légèrement et les joints souples absorbent cette déformation entre les tronçons. **Dans une première partie, on cherchera à déterminer l'espace minimal à prévoir** entre deux tronçons de béton pour permettre le bon fonctionnement de ces joints, et à identifier le **facteur de sécurité** permettant d'éviter la fissuration du béton.
- Dans une seconde partie**, on s'intéressera au cas où le béton est placé sur une portion en pente (comme dans la montée de Brabois). Avant durcissement, le béton va donc **s'écouler le long de la pente** : on cherchera à identifier le temps maximal de durcissement du béton pour permettre la mise en place de joints souples de dimensions suffisantes.

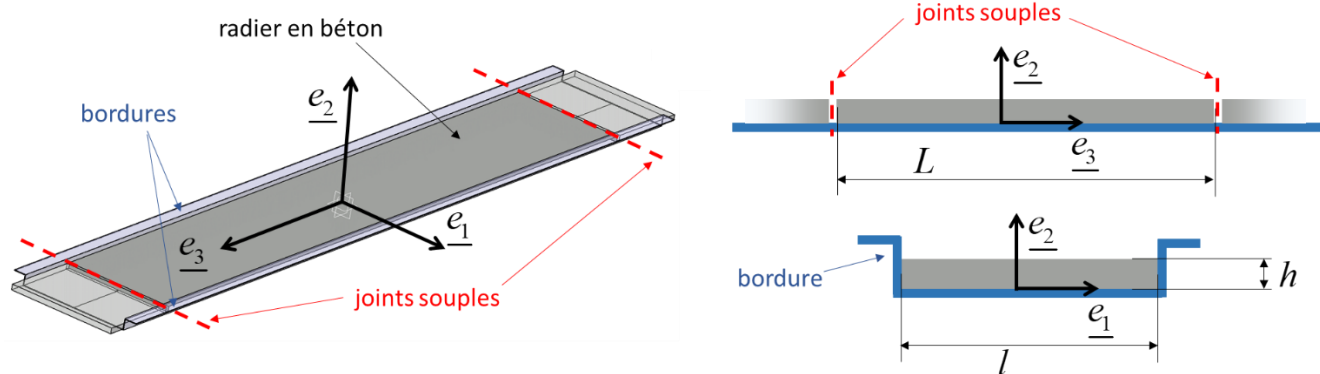


Figure 2: Géométrie simplifiée du radier de béton : vue isométrique (à gauche), et coupes longitudinales et transverses (à droite).

Limites d'élasticité du béton en compression	$R_e = 21 \text{ MPa}$
Module d'Young du béton	$E = 24 \text{ GPa}$
Coefficient de Poisson du béton	$\nu = 0.2$
Hauteur du radier	$h = 20 \text{ cm}$
Largeur du radier	$l = 4 \text{ m}$
Longueur des tronçons	$L = 25 \text{ m}$

Hypothèses

- Le socle sur lequel les radiers sont coulés, ainsi que les bordures qui délimitent la voie du futur trolleybus, sont considérés parfaitement indéformables.
- On se place évidemment sous l'hypothèse des petites perturbations.
- Dans la première partie, le béton sera considéré comme un solide élastique linéaire isotrope ; dans la seconde partie, il sera considéré comme un fluide newtonien avant durcissement.

Première partie (14 points)

On cherche à déterminer la déformation du radier de béton lors du passage d'un trolleybus. Le poids propre du radier de béton est négligé, et la masse du trolleybus est **supposée uniformément répartie** sur l'ensemble de la surface. On cherche à connaître la déformation dans la direction de la circulation du trolleybus $\underline{e}_2$ pour connaître l'épaisseur du joint souple à placer.

1. On considère le radier de béton comme un parallélépipède de hauteur h , de largeur l et de longueur L . En raison de la physique du problème, on se propose de faire l'hypothèse que le champ de déplacements est sous la forme : $\underline{u}(\underline{x}) = u_2(x_2)\underline{e}_2 + u_3(x_3)\underline{e}_3$ Calculer le champ de déformations associé (/2)

2. Calculer le tenseur des contraintes correspondant à cet état de déformation (/1)

--> suite au dos

3. La surface visible du radier en béton (en $x_2 = h$) est soumise au poids du trolleybus de masse M , supposée uniformément répartie. En déduire la valeur de la composante σ_{22} au niveau de cette surface en fonction des paramètres du problème (remarque : la gravité est évidemment selon $-\underline{e}_2$!) (/2)

4. A partir de l'équation d'équilibre et de la question précédente, montrer que la contrainte σ_{22} est une constante. Déterminer cette constante. (/1)

--> suite au dos

5. Les deux surfaces aux extrémités du radier en béton (en $x_3 = \pm L/2$) doivent être des surfaces libres (avant la mise en place des joints), à condition que suffisamment d'espace existe entre deux tronçons de béton. En déduire une condition sur la composante σ_{33} au niveau de ces deux surfaces. (/1)

6. A partir des résultats de l'équation d'équilibre, montrer que $\sigma_{33} = 0 \quad \forall x_3$ (/1)

7. Comme les bordures sont indéformables, on peut facilement faire l'hypothèse que ε_{11} sera nulle. A partir de la loi de comportement inverse, montrer que $\sigma_{11} = \nu \sigma_{22}$ (/1)

8. A partir des questions précédentes et la loi de comportement inverse, calculer complètement la

déformation ε_{33} du béton. Vérifier la cohérence du signe et de l'unité de ε_{33} .

(/1)

9. On connaît désormais complètement ε_{33} ; à partir de la question 1, déduire le déplacement u_3 aux deux extrémités $x_3 = \pm L/2$ du radier de béton, en considérant que la symétrie sera conservée selon le plan de coordonnées $x_3 = 0$

(/1)

10. Quelle doit être l'épaisseur minimale du joint souple entre deux radiers de béton pour un trolleybus d'une masse de e 10 tonnes? (NB : ne pas hésiter à arrondir, on cherche uniquement l'ordre de grandeur ! Mais les valeurs ont été choisies pour que le calcul soit très facile...)

(/1)

11. Le tenseur des contraintes au sein du béton est donc sous la forme : $\underline{\underline{\sigma}} = K(\nu \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2)$ avec K une constante négative en Pascals déterminée en question 4. Calculer les trois contraintes principales de $\underline{\underline{\sigma}}$ et les directions principales correspondantes. (/1)

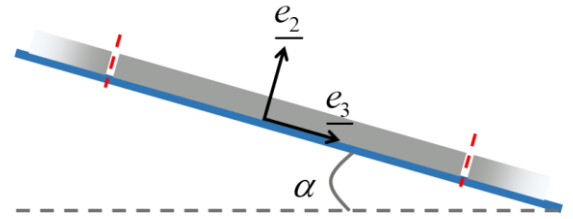
12. Le facteur de sécurité est défini par le rapport entre la contrainte maximale admissible par le matériau (la limite d'élasticité R_e) et la contrainte équivalente maximale dans le matériau (la contrainte de Von Mises). Calculer ce facteur $f = R_e / \sigma_{VM}$. Doit-on s'attendre à des problèmes ? (/1)

13. Question bonus : lister et critiquer les principales hypothèses qui rendent le calcul ci-dessus très approximatif. (+1 si bonus)

Seconde partie (6 points)

On cherche désormais à étudier l'écoulement du béton lors de sa mise en place (avant durcissement), dans le cas où le radier est placé dans une pente d'angle α . Cela revient donc à l'étude (très classique) de l'écoulement d'un fluide newtonien le long d'un plan incliné.

14. Contrairement au cas précédent, la surface visible du béton (en $x_2 = h$) est désormais une surface libre, et on ne néglige pas la pression atmosphérique. Ecrire cette condition et les conséquences sur certaines composantes du tenseur des contraintes en $x_2 = h$.
(/1)



15. En raison de la physique du problème, on considère que le champ de vitesses lors de l'écoulement sera sous la forme $\underline{v}(x_2) = v_3(x_2)\underline{e}_3$. Cet écoulement est-il incompressible ?
(/1)

16. On considère que l'équation de Navier-Stokes est applicable dans ce cas. On considère le champ de vitesse précédent, et un champ de pression évidemment sous la forme $p(x_2, x_3)$. Ecrire le système qui résulte de l'écriture de l'équation de Navier-Stokes, en considérant l'écoulement établi
(/1)

--> suite au dos

17. Ecrire le champ de contraintes associé au champ de vitesses $\underline{v}(x_2) = v_3(x_2)\underline{e}_3$ en considérant le béton comme un fluide newtonien. (1)

18. La résolution de l'équation de Navier-Stokes peut permettre d'écrire : $v_3 = -\frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} \frac{x_2^2}{2} + Ax_2 + B$
 En vertu de la condition de surface libre écrite en question 14, et en considérant que la vitesse du béton est nulle au niveau du socle du radier, en déduire que nécessairement on obtient le champ :

$$v_3 = x_2 \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} \left(h - \frac{x_2}{2} \right). \quad (1)$$

--> suite au dos

19. La viscosité du béton varie évidemment en fonction du temps lors du durcissement, de telle sorte que $\eta(t)$, en fonction de sa composition exacte. A partir du résultat précédent, expliquer la démarche qui pourrait conduire à choisir cette composition (et donc à choisir l'évolution $\eta(t)$) pour maintenir une épaisseur suffisante au niveau du jointe souple entre 2 radiers de béton (/1)

20. Question bonus: la réflexion autour du plan de mobilités dans le Grand Nancy a fait l'objet d'un débat long et houleux. Que pensez-vous de la solution du trolleybus qui a été retenue ? (+1 si bonus)

FORMULAIRE

Gradient d'un vecteur en coordonnées cartésiennes :	$\underline{\underline{grad}} \underline{T} = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial T_1}{\partial x_3} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 +$ $\frac{\partial T_2}{\partial x_1} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial T_2}{\partial x_3} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 +$ $\frac{\partial T_3}{\partial x_1} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial T_3}{\partial x_2} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial T_3}{\partial x_3} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$
Divergence d'un tenseur d'ordre 2 en coordonnées cartésiennes :	$\underline{\underline{div}} \underline{T} = \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \right) \underline{e}_1 +$ $\left(\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \right) \underline{e}_2 +$ $\left(\frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \right) \underline{e}_3$
Divergence d'un vecteur en coordonnées cartésiennes :	$\underline{\underline{div}} \underline{T} = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} + \frac{\partial T_3}{\partial x_3}$
Loi de comportement d'un fluide newtonien :	$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + 2\eta \underline{\underline{d}} \quad \text{avec } \eta \text{ la viscosité}$
Loi de Hooke :	$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{avec } \lambda, \mu \text{ les paramètres de Lamé}$
Loi de Hooke inverse :	$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}}$ avec E module d'Young, ν coefficient de Poisson
Equation d'équilibre :	$\underline{\underline{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \left(\underline{\underline{f}}^m - \underline{\underline{a}} \right) = \underline{\underline{0}}$
Tenseur des déformations :	$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T \right)$
Tenseur vitesse de déformations :	$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left(\left(\underline{\underline{grad}} \underline{v} \right)^T + \underline{\underline{grad}} \underline{v} \right)$
Contrainte équivalente de Von Mises	$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}$
Equation de Navier-Stokes	$\rho^m \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho^m \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right) = -\underline{\underline{grad}}(p) + \eta \underline{\underline{\Delta}} \underline{v} + \rho^m \underline{g}$