

NOM :

Prénom :

## Mécanique des Milieux Continus (MMC)

*Note : le sujet qui suit s'inscrit dans la continuité du test de novembre, et reprend même certaines des questions déjà posées et pour lesquelles un corrigé vidéo en ligne était disponible.*

L'automne 2024 a été marqué par de nombreux événements climatiques extrêmes en grande partie attribuables au changement climatique. Il convient pour l'avenir (en plus des mesures nécessaires d'*atténuation* du changement climatique) de diminuer les conséquences de ce type d'événements en tentant de mieux les comprendre et les anticiper (on parle alors de mesure d'*adaptation*).



Figure 1: Espagne, octobre 2024.

### Partie 1 (mécanique des fluides) : écoulement lors d'une inondation (/10)

Dans cette partie on cherche à comprendre l'écoulement d'une grosse quantité d'eau le long d'un plan incliné pour analyser le cas des inondations qui peuvent faire suite à un cumul de précipitations élevé sur un sol imperméabilisé (routes, parkings, bâtiments).

On considère pour cela un fluide newtonien incompressible soumis aux seules forces de pesanteur s'écoulant de façon laminaire et sur un plan infini incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. On cherche à connaître le profil de vitesse à l'intérieur de ce milieu continu pour prédire la cinétique des inondations. On note  $h$  l'épaisseur de la couche de fluide et  $P_{atm}$  la pression atmosphérique. On considère que le fluide est newtonien et incompressible, et que la vitesse du fluide est nulle au niveau du sol et maximal au niveau de la surface libre  $x_2 = h$ .

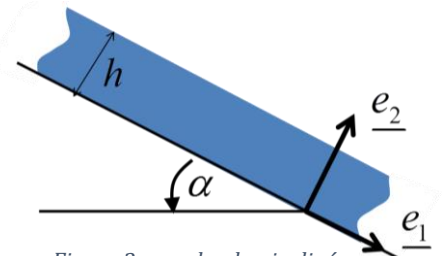


Figure 2 : cas du plan incliné

1. Ecrire proprement la condition de surface libre en  $x_2 = h$ , et en déduire la forme du tenseur des contraintes en  $x_2 = h$  (/1)

2. Durant le test de novembre on a vu que le champ de vitesses s'écrivait sous la forme  $\underline{v}(x_2) = v_1(x_2)\underline{e}_1$ . Déduire la vitesse de déformation (ou taux de déformation) au sein du fluide (/1)

3. En déduire le tenseur des contraintes dans le fluide (on appelle  $p$  la pression dans le fluide) (/1)

4. On considère le champ de vitesse précédent, et un champ de pression sous la forme  $p(x_2)$ . Ecrire (sans le résoudre) le système d'équations résultant de l'équation de Navier-Stokes. (/2)

--> suite au dos

5. Montrer qu'un champ de vitesses sous la forme :  $v_1 = -\frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} \frac{x_2^2}{2} + Ax_2 + B$  est solution de la projection selon  $\underline{e}_1$  de l'équation de Navier-Stokes. (/1)

6. A partir des résultats des questions 1 et 3, et en considérant l'adhérence du fluide au niveau du sol  $x_2 = 0$ , déterminer les constantes A et B dans la forme donnée en question précédente. (/2)

--> suite au dos

7. On vient de retrouver la forme donnée pour le test de novembre. Pour ce champ de vitesses, calculer le débit volumique de fluide si le plan est de largeur  $L$  selon  $\underline{e}_3$ , et vérifier son unité. (/1)

8. Une voiture initialement positionnée en  $\underline{x} = \underline{X} = X_i \underline{e}_i$  est entraînée par cet écoulement. Quelle sera sa trajectoire ? (/1)

## Partie 2 (mécanique des solides) : mur d'un bâtiment inondé (/10)

Dans cette partie on s'intéresse aux sollicitations au sein d'un mur en béton sous l'effet de la pression due à cette inondation.

En aval de ce plan incliné, l'eau va s'accumuler et peut mettre en péril la stabilité de certains bâtiments. On considère un mur en béton (considéré comme un matériau élastique linéaire isotrope) d'épaisseur  $e$  et de hauteur  $h$  soumis à la pression de l'eau :

$$p = \rho g (h - X_2)$$

Une analyse de la physique du problème nous amène à penser que le champ de déplacement au sein du mur pourrait se formuler:

$$\underline{u}(X_1, X_2) = (AX_2^4)\underline{e}_1 - (BX_1 X_2)\underline{e}_2$$

avec  $A, B$  des constantes positives. On va chercher dans la suite à déterminer si ce champ paraît adéquat.

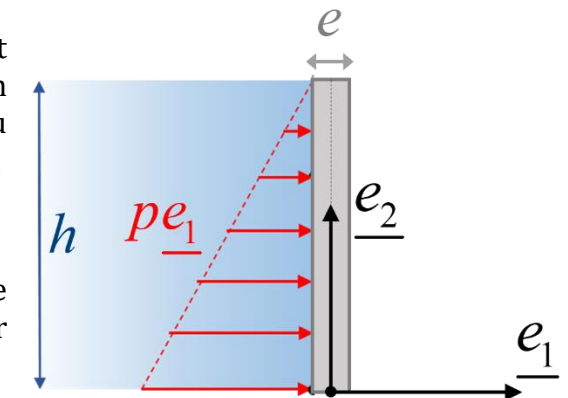


Figure 3 : modélisation du mur en béton sous l'effet de la pression de l'eau

9. Ce champ de déplacements respecte-t-il la condition d'encastrement du mur à sa base ? (/1)

10. Calculer le tenseur des déformations correspondant à ce champ de déplacements, en faisant l'hypothèse des petites perturbations. (/1)

11. Interpréter les différentes composantes de ce tenseur, et discuter du signe de la composante  $\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$ . Est-ce cohérent avec les observations lors d'une flexion ? (/1,5)

12. Calculer le tenseur des contraintes correspondant à ce champ de déformations. (/1)

13. On fait l'hypothèse que l'effet du poids propre du mur est négligeable par rapport aux conséquences de la pression de l'eau appliquée, et que le problème est statique. A partir de l'équation d'équilibre, montrer qu'on a obligatoirement la condition  $12AX_2^2 - B = 0$ . (/1)

--> suite au dos

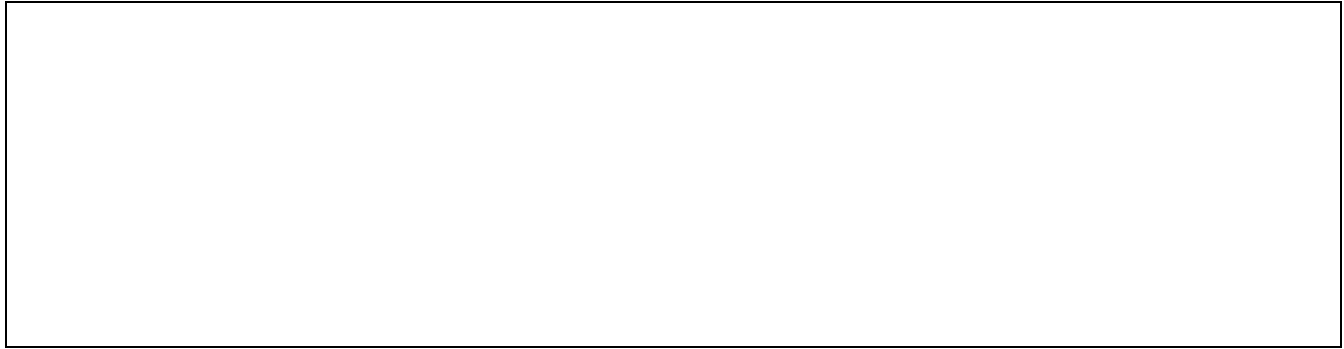
14. La surface du mur  $X_1 = e/2$  est une surface libre. Ecrire proprement cette condition, puis montrer qu'elle mène à un résultat  $B=0$ . Pourquoi ce résultat est-il incohérent ? (/1.5)

La question précédente invalide le champ de déplacements qui a été proposé. Au semestre prochain, vous verrez dans l'EC « mécanique pour l'ingénieur » comment proposer des formes approchées pour ce cas, et il vous sera indiqué que dans le cas ci-dessus, le champ de contraintes dans tout le mur peut être approximé par la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{22}(X_1, X_2) \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 = f(X_2) X_1 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 \text{ avec } f \text{ une fonction polynomiale.}$$

15. Ecrire ce tenseur des contraintes dans sa base principale. Que valent respectivement la contrainte principale maximale et minimale en fonction du signe de  $X_1$  ? (/1)

--> suite au dos

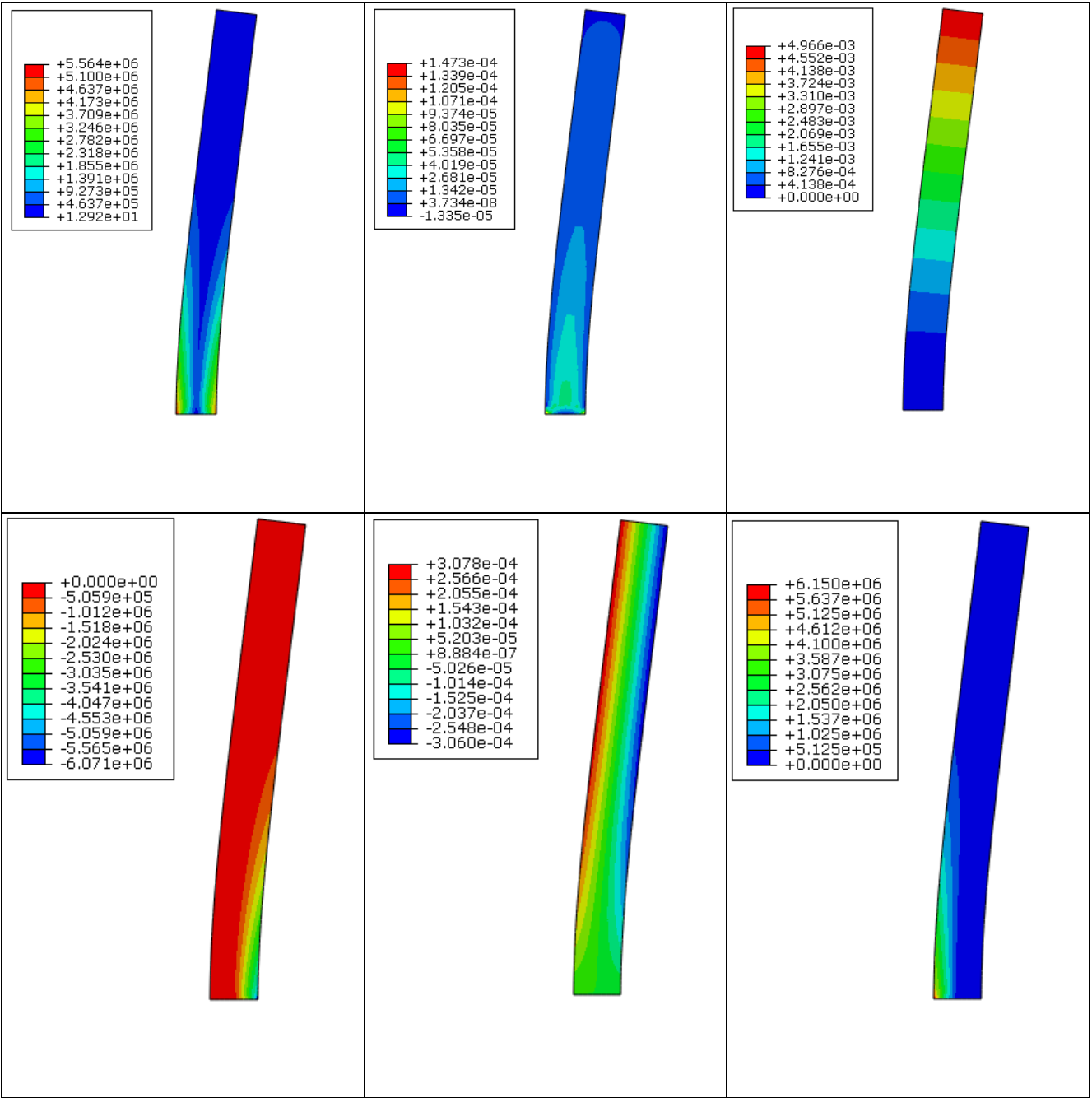


16. Dans le tableau ci-dessous, compléter la légende avec les valeurs suivantes et leurs unités :

$u_1$  ,  $u_2$  ,  $\varepsilon_{12}$  ,  $\sigma_I$  ,  $\sigma_{II}$  ,  $\sigma_{VM}$

( $\sigma_{VM}$  : contrainte équivalente de Von Mises)

(/2)



## FORMULAIRE

|                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Gradient d'un vecteur en coordonnées cartésiennes :             | $\underline{\underline{grad}} \underline{T} = \frac{\partial T_i}{\partial x_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$                                                                                                                                                             |
| Divergence d'un tenseur d'ordre 2 en coordonnées cartésiennes : | $\underline{\underline{div}} \underline{T} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \underline{e}_i$                                                                                                                                                                                   |
| Divergence d'un vecteur en coordonnées cartésiennes :           | $\underline{\underline{div}} \underline{T} = \frac{\partial T_i}{\partial x_i}$                                                                                                                                                                                                      |
| Loi de comportement d'un fluide newtonien :                     | $\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + 2\eta \underline{\underline{d}} \quad \text{avec } \eta \text{ la viscosité}$                                                                                                                                       |
| Loi de Hooke :                                                  | $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{avec } \lambda, \mu \text{ les paramètres de Lamé}$                                                        |
| Equation d'équilibre :                                          | $\underline{\underline{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho (\underline{\underline{f}}^m - \underline{\underline{a}}) = \underline{0}$                                                                                                                                        |
| Tenseur des déformations :                                      | $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T)$                                                                                                                                    |
| Tenseur vitesse de déformations :                               | $\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left( (\underline{\underline{grad}} \underline{v})^T + \underline{\underline{grad}} \underline{v} \right)$                                                                                                                                 |
| Equation de Navier-Stokes                                       | $\rho^m \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho^m \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right) = -\underline{\underline{grad}}(p) + \eta \underline{\underline{\Delta}} \underline{v} + \rho^m \underline{g}$ |