

Équations macroscopiques de la physique classique



Leçon 2



Advection et diffusion

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

25 septembre 2017

Objectifs de la leçon

- ▶ Forme forte (EDP traduisant des bilans locaux associés à des conditions aux limites standards) des problèmes de diffusion et advection diffusion en 2D/3D, soit :
 - ▶ Spécification des types de grandeurs (densité scalaire, champ de vitesses et propriétés variables dans l'espace) ;
 - ▶ Expression des lois de Fick ;
 - ▶ Brève analyse des approximations de la solution d'équations d'advection et/ou diffusion ;
- ▶ Introduction de l'équation de sédimentation (Masson-Weaver) sans approfondissement sur sa genèse et juste parce qu'elle a la même structure que l'équation d'advection-diffusion et permet des expérimentations simples et visuelles.

Vocabulaire pour décrire la géométrie

- ▶ E_3 est l'espace des positions $\vec{x}$, c'est à dire à la fois l'espace ordinaire et l'espace vectoriel de dimension 3 muni du produit scalaire euclidien.
- ▶ $D \subset E_3$ est un domaine **connexe** (d'un seul tenant) et **simplement connexe** (sans boucles ni trous) de E_3 ;
- ▶ D domaine est **borné** (la distance entre deux positions quelconque dans le domaine est bornée) ;
- ▶ Le domaine est un **ouvert** (au sens topologique i.e. pour toute position il existe un nombre non nul pour lequel toutes les positions qui sont à une distance de ce point inférieure à ce nombre appartiennent au domaine D) ;

Vocabulaire pour décrire la géométrie

- Le bord ∂D de D est une surface dans E_3 ; cette surface peut être définie comme le lieu des point où une fonction $F : E_3 \longrightarrow \mathbb{R}$ s'annule. Le bord ∂D est lisse si la fonction F est différentiable et si gradient ne s'annule pas aux positions de ∂D ;
- Le domaine D est lisse si son bord ∂D l'est ;
- Chacune des positions $\vec{x}$ du bord ∂D d'un domaine lisse D peut être associée à un vecteur normé

$$\vec{n}(\vec{x}) = \vec{\nabla} F(\vec{x}) / |\vec{\nabla} F(\vec{x})|$$

et cette correspondance définit une application, appelée **champ de normales**,

$$\vec{n} : \partial D \longrightarrow E_3(1)$$

où $E_3(1)$ désigne l'espace des vecteurs de E_3 de norme 1.

Le vecteur « nabra » de Hamilton

- La position dans l'espace E_3 est $\vec{x} = x \vec{k}_x + y \vec{k}_y + z \vec{k}_z$
- Une fonction scalaire de $\vec{x}$ est
$$F : E_3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\vec{x} \longrightarrow F(\vec{x})$$
- L'expression à l'ordre 1 de $F(\vec{x} + \delta\vec{x})$ lorsque $\delta\vec{x}$ est petit est

$$F(\vec{x} + \delta\vec{x}) \approx F(\vec{x}) + \vec{\nabla} F(\vec{x}) \cdot \delta\vec{x}$$

où $\vec{\nabla} F(\vec{x})$ est un champ de vecteur de E_3 qui s'appelle le **gradient** de F .

- La notation $\vec{\nabla} F$ du gradient de F peut être vue comme l'application d'un vecteur symbolique appelé le **vecteur nabra de Hamilton**

$$\vec{\nabla} = \partial_x \vec{k}_x + \partial_y \vec{k}_y + \partial_z \vec{k}_z$$

à F , cette application étant la dérivation indiquée par ∂_x , ∂_y ou ∂_z

Champ de normal d'une surface

- Une surface est définie par les $\vec{x}$ tels que $F(\vec{x}) = 0$.
- Si $\vec{x}$ est tel que $F(\vec{x}) = 0$ la question est de trouver $\delta\vec{x}$ tel que $F(\vec{x} + \delta\vec{x}) = 0$
- Pour $\delta\vec{x}$ suffisamment petit

$$F(\vec{x} + \delta\vec{x}) \approx F(\vec{x}) + \vec{\nabla} F(\vec{x}) \cdot \delta\vec{x}$$

et donc la condition sur $\delta\vec{x}$ est

$$\vec{\nabla} F(\vec{x}) \cdot \delta\vec{x} = 0$$

- D'où vient que le vecteur $\vec{\nabla} F(\vec{x})$ est normal à toute variation $\delta\vec{x}$ qui feraient que $\vec{x} + \delta\vec{x}$ reste (à l'ordre 1) sur la surface.
- Le champ de normal à la surface est donc fait de ce vecteur rendu unitaire par division par sa norme $\vec{\nabla} F(\vec{x}) / |\vec{\nabla} F(\vec{x})|$.

Champ de vitesse dans un domaine D

- Un champ de vitesses dans un domaine D est une application

$$\vec{v} : \mathbb{R} \times D \longrightarrow E_3(m/s)$$

où $E_3(m/s)$ désigne l'espace des vecteurs de E_3 dont la longueur n'est plus un mètre mais un mètre par seconde.

- Ce champ de vitesse **advection les particules matérielles** qui se situent initialement aux positions $\vec{x} \in D$; celles-ci se retrouvent à l'instant t aux positions $\vec{X}(t)$ solutions de

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{v}(t, \vec{X}) ; \vec{X}(t=0) = \vec{x}$$

- Pour que les particules ne sortent pas du domaine D il faut que le champ de vitesse n'ait pas de composante normale à sa frontière, soit

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial D$$

Flot du champ de vitesses

- L'application flot du champ de vitesses est

$$\begin{aligned}\vec{\Psi} : \mathbb{R} \times E_3 &\longrightarrow E_3 \\ (t, \vec{x}) &\longrightarrow \vec{\Psi}(t, \vec{x}) = \vec{X}(t)\end{aligned}$$

où $\vec{X}$ est solution de $d\vec{X}/dt = \vec{v}(t, \vec{X})$ avec $\vec{X}(t=0) = \vec{x}$ et donc nécessairement $\vec{\Psi}(t=0, \vec{x}) = \vec{x}$

- Les positions définies par $\vec{\Psi}(t, \vec{x})$ lorsque t varie constituent la **trajectoire** d'une particule qui serait entraînée par le champ de vitesse $\vec{v}$ et qui serait à la position $\vec{x}$ en $t=0$ (initialement).

- Le vecteur vitesse de cette particule est, à l'instant t , $\partial_t \vec{\Psi}(t, \vec{x})$

- Et c'est aussi le vecteur vitesse à l'instant t et à la position $\vec{\Psi}(t, \vec{x})$, d'où la relation

$$\partial_t \vec{\Psi}(t, \vec{x}) = \vec{v}(t, \vec{\Psi}(t, \vec{x}))$$

Densité volumique

- La densité d'une quantité d'unité $\mathfrak{U}$ est définie sur D par

$$\rho : \mathbb{R} \times D \longrightarrow \mathbb{R}(\mathfrak{U}/m^3)$$

où $\mathbb{R}(\mathfrak{U}/m^3)$ désigne les nombres réels dont l'unité physique est le rapport de l'unité $\mathfrak{U}$ de la quantité par l'unité de volume m^3

- Si $\delta D \subset D$ est un sous-domaine de D (pas nécessairement infinitésimal pour l'instant), la quantité δQ contenue dans δD à l'instant t est

$$\delta Q = \int_{\delta D} \rho(t, \vec{x}) d\vec{x}^3$$

où l'élément de volume est noté $d\vec{x}^3$

- La variation par rapport au temps de cette quantité est

$$\frac{d\delta Q}{dt} = \int_{\delta D} \partial_t \rho(t, \vec{x}) d\vec{x}^3$$

Flux advectif

- Si la densité précédente évolue sous l'action d'un champ de vitesse $\vec{v}$, le **flux advectif** est un champ de vecteurs

$$\begin{aligned}\vec{\Phi} : \mathbb{R} \times E_3 &\longrightarrow E_3(\mathfrak{U}/(m^2 s)) \\ (t, \vec{x}) &\longrightarrow \vec{\Phi}(t, \vec{x}) = \rho(t, \vec{x}) \vec{v}(t, \vec{x})\end{aligned}$$

où $E_3(\mathfrak{U})/(m^2 s)$ désigne les vecteurs de E_3 dont la longueur est d'unité physique $\mathfrak{U}/(m^2 s)$

- Si δS est une surface intérieure à D (pas nécessairement infinitésimale pour l'instant) et que cette surface est dotée d'un champ de normale

$$\begin{aligned}\vec{n} : \delta S &\longrightarrow E_3(1) \\ \vec{x} &\longrightarrow \vec{n}(\vec{x})\end{aligned}$$

la quantité qui traverse δS par seconde est

$$\int_{\delta S} \vec{\Phi}(t, \vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) d\vec{x}^2 = \int_{\delta S} \rho(t, \vec{x}) \vec{v}(t, \vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) d\vec{x}^2$$

où l'élément de surface est noté $d\vec{x}^2$

Conservation de quantité

► La surface δS précédente est maintenant le bord du sous-domaine δD , la quantité qui traverse ce bord par seconde est donc

$$\int_{\partial\delta D} \rho(t, \vec{x}) \vec{v}(t, \vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) d\vec{x}^2$$

et, si la normale est orientée vers l'extérieur de δD , c'est la quantité qui sort de D .

► Comme d'autre part la variation par unité de temps de la quantité contenue par D est

$$\frac{d\delta Q}{dt} = \int_{\delta D} \partial_t \rho(t, \vec{x}) d\vec{x}^3$$

il reste à exprimer que ces deux grandeurs sont liées, soit

$$\int_{\delta D} \partial_t \rho(t, \vec{x}) d\vec{x}^3 + \int_{\partial\delta D} \rho(t, \vec{x}) \vec{v}(t, \vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) d\vec{x}^2 = 0$$

Équation d'advection

- Le théorème de Green-Ostrogradski affirme que pour un champ de vecteurs différentiable quelconque

$$\int_{\delta D} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \, d\vec{x}^3 = \int_{\partial\delta D} \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\vec{x}$$

où $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ est la divergence de $\vec{u}$.

- Son application à $\vec{u} = \vec{\Phi}$ dans l'équation de conservation de quantité conduit alors à

$$\int_{\delta D} \partial_t \rho \, d\vec{x}^3 + \int_{\delta D} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \, d\vec{x}^3 = \int_{\delta D} \left(\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right) d\vec{x}^3 = 0$$

- Comme ce résultat est valable pour n'importe quel domaine δD , il faut qu'en toute position

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

c'est l'équation d'advection.

Divergence et théorème de Green-Ostrodraski

► Avec les notations du transparent 5, le « produit scalaire » du vecteur nabla de Hamilton par un champ de vecteur $\vec{v}$ de la forme

$$\vec{v} = u \vec{k}_x + v \vec{k}_y + w \vec{k}_z$$

(où u, v, w sont des champs scalaires) est

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w$$

c'est la divergence du champ de vecteurs $\vec{v}$; cette divergence est un champ scalaire.

► Le théorème de Green-Ostrogradski appliqué à un domaine $\forall D$ s'écrit

$$\int_D \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\vec{x}^3 = \int_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{n} d\vec{x}$$

et on pourrait définir la divergence d'un champ de vecteur comme « cette expression à partir des dérivées de ses composantes » qui rend valide la relation de Green-Ostrogradski.

Flux diffusif et équation de diffusion

- Cette fois la quantité varie sous l'action d'un mécanisme de diffusion, le flux diffusif (1^o loi de Fick)

$$\begin{aligned}\vec{\Phi} : \mathbb{R} \times E_3 &\longrightarrow E_3(\mathfrak{L})/(m^2 s) \\ (t, \vec{x}) &\longrightarrow \vec{\Phi}(t, \vec{x}) = -\alpha \vec{\nabla} \rho(t, \vec{x})\end{aligned}$$

où α est la diffusivité (m^2/s) et $\vec{\nabla} \rho$ le gradient de ρ . La diffusivité peut dépendre de l'espace et même du temps, c'est une fonction

$$\begin{aligned}\alpha : \mathbb{R} \times E_3 &\longrightarrow \mathbb{R}(m^2/s) \\ (t, \vec{x}) &\longrightarrow \alpha(t, \vec{x})\end{aligned}$$

- *Mutatis mutandis*, la même analyse que pour le flux advectif peut être refaite avec le flux convectif et elle conduit à l'équation de diffusion

$$\partial_t \rho - \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{\nabla} \rho) = 0$$

Source et puits

► L'analyse qui conduit aux équations d'advection et de diffusion se synthétise sous la forme suivante : on donne

1. une densité ρ , la quantité contenue dans un domaine δD est $\delta Q = \int_{\delta D} \rho(t, \vec{x}) d\vec{x}^3$;
2. l'expression d'un flux de quantité $\vec{\Phi}$; la quantité qui quitte le domaine δD par unité de temps est $\delta \Phi = \int_{\partial \delta D} \vec{\Phi}(t, \vec{x}) \cdot \vec{n} d\vec{x}^2$

puis on écrit une relation de conservation comme (2^o loi de Fick)

$$\frac{d\delta Q}{dt} + \delta \Phi = 0$$

► Si de plus la quantité est produite (source) ou consommée (puits) dans le domaine ∂D avec un taux de $\delta \Theta$ (en $\mathfrak{U}/(s)$) alors l'équation de conservation devient

$$\frac{d\delta Q}{dt} + \delta \Phi = \delta \Theta$$

Source et puits

- Si de plus cette production ou consommation est répartie dans le domaine D avec une densité de production ou consommation

$$\begin{aligned}\theta &: \mathbb{R} \times E_3 \longrightarrow \mathbb{R}(\mathfrak{U}/(m^3 \text{ s})) \\ (t, \vec{x}) &\longrightarrow \theta(t, \vec{x})\end{aligned}$$

alors

$$\delta\Theta = \int_{\delta D} \theta(t, \vec{x}) d\vec{x}^3$$

- Pour l'advection et la diffusion cela se traduit par

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \theta \text{ et } \partial_t \rho - \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{\nabla} \rho) = \theta$$

ce sont les équations d'advection et diffusion avec source (ou puits).

- Un exemple de telle source ou puits est fourni par les réactions chimiques qui peuvent consommer ou produire des quantités ; mais le développement de l'exemple demande de considérer les mécanismes d'activation de ces réactions chimiques, ce qui introduit des complications qu'il serait prématuré de considérer.

Advection-diffusion avec source

- L'évolution d'une quantité sous l'action simultanée de l'advection, de la diffusion et de sources (ou puits) s'écrit

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{\nabla} \rho) = \theta$$

- La densité initiale $\rho(t = 0, \vec{x}) = \rho_0(\vec{x})$ est une donnée, et il est nécessaire pour connaître $\rho(t, \vec{x})$ d'ajouter des conditions aux limites sur ∂D .
- Sans que ce soit une nécessité, l'expression des conditions aux limites est facilitée si le champ de vitesse $\vec{v}$ est à composante nulle sur ∂D , soit

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial D$$

Ainsi l'entrée ou la sortie de quantité n'est pas due au flux advectif.

Condition aux limites de Dirichlet

- Le bord ∂D peut être séparé en deux parties

$$\partial D = \partial D_D + \partial D_{NR}$$

de manière à mettre une condition aux limites de **Dirichlet** sur ∂D_D et de **Neumann et/ou Robin** sur ∂D_{NR} . On convient que chacune des parties Dirichlet et Neumann-Robin peut être vide.

- Une condition aux limites de Dirichlet s'écrit

$$\forall \vec{x} \in \partial D_D : \rho(t, \vec{x}) = \rho_{\partial}(t, \vec{x})$$

pour indiquer que si $\vec{x} \in \partial D_D$ alors ρ à cette position prend la valeur à cette même position d'une fonction

$$\rho_{\partial} : \mathbb{R} \times \partial D_D \longrightarrow \mathbb{R}(\mathfrak{U}/m^3)$$

dont le support est ∂D_D (pas D). Plus brièvement, en conférant à ρ et ρ_{∂} le statut de variables dépendantes des variables indépendantes $\vec{x}$ et t , on écrit

$$\rho = \rho_{\partial} \text{ sur } \partial D_D$$

Condition aux limites de Neumann et/ou Robin

► Puisque le flux advectif est nul (du fait que $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ sur ∂D et donc sur ∂D_{NR}), la seule partie du flux sortant de D par ∂D_{NR} est diffusive ; c'est

$$-\alpha \vec{\nabla} \rho \cdot \vec{n}$$

► Une condition aux limites de Neumann et/ou Robin consiste à écrire (en abrégé) sur ce flux la relation

$$-\alpha \vec{\nabla} \rho \cdot \vec{n} = \Phi_{\partial} + h \rho \text{ sur } \partial D_{NR}$$

où

$$\begin{aligned} \Phi_{\partial} &: \mathbb{R} \times \partial D_{NR} \longrightarrow \mathbb{R}(\mathfrak{U}/(m^2 \text{ s})) \\ h &: \mathbb{R} \times \partial D_{NR} \longrightarrow \mathbb{R}(\mathfrak{U} \text{ m/s}) \end{aligned}$$

sont des fonctions données. Une abréviation supplémentaire consiste à noter $\vec{\nabla} \rho \cdot \vec{n}$ par $\frac{\partial \rho}{\partial n}$ ou plus court encore $\partial_n \rho$; ainsi la condition s'écrit

$$-\alpha \partial_n \rho = \Phi_{\partial} + h \rho \text{ sur } \partial D_{NR}$$

Le système au complet

► Un problème complet consiste en la recherche de ρ solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{\nabla} \rho) = \theta & \text{dans } D \\ \rho(t=0, \vec{x}) = \rho_0(\vec{x}) & \text{dans } D \\ \rho = \rho_\partial & \text{sur } \partial D_D \\ -\alpha \partial_n \rho = \Phi_\partial + h \rho & \text{sur } \partial D_{NR} \end{array} \right.$$

où les fonctions de support D

$$\begin{array}{ll} \alpha : E_3 \longrightarrow \mathbb{R}(m^2/s) & ; \quad \rho_0 : E_3 \longrightarrow \mathbb{R}(\mathfrak{U}/m^3) \\ \vec{v} : E_3 \longrightarrow E_3(m/s) & ; \quad \theta : E_3 \longrightarrow \mathbb{R}(\mathfrak{U}/(m^3 s)) \end{array}$$

et celles de support ∂D_D ou ∂D_{NR} ($\partial D = \partial D_D + \partial D_{NR}$)

$$\begin{array}{ll} \Phi_\partial : \mathbb{R} \times \partial D_{NR} \longrightarrow \mathbb{R}(\mathfrak{U}/(m^2 s)) \\ h : \mathbb{R} \times \partial D_{NR} \longrightarrow \mathbb{R}(\mathfrak{U} m/s) \\ \rho_\partial : \mathbb{R} \times \partial D_D \longrightarrow \mathbb{R}(\mathfrak{U}/m^3) \end{array}$$

sont des données.

Mathématique et physique

- ▶ Les questions mathématiques sont
 1. connaître les propriétés minimales que doivent posséder les données pour qu'il existe une solution unique au système complet ;
 2. ces propriétés étant avérées, identifier des méthodes permettant la résolution effective.

- ▶ Les questions physiques et techniques sont
 1. identifier les situations qui relèvent de ce système ;
 2. utiliser les solutions du système pour prévoir l'évolution de ces situations.

Il y a *a priori* complémentarité entre les deux approches...

Le problème stationnaire

► Le régime stationnaire est celui qui est atteint quand la solution ne dépend plus du temps. Reste à savoir si ce régime stationnaire existe.

► S'il existe alors la densité atteinte est

$\rho_\infty : E_3 \longrightarrow \mathbb{R}(\mathcal{U}/m^3)$ solution de

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot (\rho_\infty \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{\nabla} \rho_\infty) = \theta & \text{dans } D \\ \rho_\infty = \rho_\partial & \text{sur } \partial D_D \\ -\alpha \partial_n \rho_\infty = \Phi_\partial + h \rho_\infty & \text{sur } \partial D_{NR} \end{cases}$$

ce qui suppose déjà que α , θ , $\vec{v}$, ρ_∂ , Φ_∂ et h ne dépendent pas du temps.

► Ensuite en introduisant $\rho_T = \rho - \rho_\infty$ solution de

$$\begin{cases} \partial_t \rho_T + \vec{\nabla} \cdot (\rho_T \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{\nabla} \rho_T) = 0 & \text{dans } D \\ \rho_T(t=0, \vec{x}) = \rho_0(\vec{x}) - \rho_\infty(\vec{x}) & \text{dans } D \\ \rho_T = 0 & \text{sur } \partial D_D \\ -\alpha \partial_n \rho_T = h \rho_T & \text{sur } \partial D_{NR} \end{cases}$$

il faut que $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_T = 0$.

Le problème stationnaire

- Le résultat se montre en multipliant par ρ_T l'équation de volume

$$\partial_t \rho_T + \vec{\nabla} \cdot (\rho_T \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{\nabla} \rho_T) = 0 \text{ dans } D$$

cela donne (après avoir un peu arrangé les termes avec les formules d'analyse vectorielle)

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{\rho_T^2}{2} \right) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_T^2 \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\rho_T^2}{2} \vec{v} \right) + \frac{\rho_T^2}{2} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \left(\alpha \vec{\nabla} \left(\frac{\rho_T^2}{2} \right) \right) \\ + \alpha \left(\vec{\nabla} \rho_T \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

- L'intégration sur D de cette relation fournit alors

$$\frac{d}{dt} \int_D \frac{\rho_T^2}{2} d\vec{x}^2 = - \int_{\partial D_{NR}} h \rho_T^2 d\vec{x}^2 - \int_D \alpha \left(\vec{\nabla} \rho_T \right)^2 - \int_D \frac{\rho_T^2}{2} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\vec{x}^2$$

où on voit que si $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, $\alpha > 0$, $h > 0$, la grandeur positive $\int_D \frac{\rho_T^2}{2} d\vec{x}^2$ est décroissante dès lors que ρ_T n'est pas nul. On conclut que ρ_T finit par s'annuler.

Conduction

- Si $\vec{v} = \vec{0}$ dans D , le problème stationnaire ($\alpha > 0$ et $h > 0$)

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{\nabla} \rho_{\infty}) + \theta = 0 & \text{dans } D \\ \rho_{\infty} = \rho_{\partial} & \text{sur } \partial D_D \\ -\alpha \partial_n \rho_{\infty} = \Phi_{\partial} + h \rho_{\infty} & \text{sur } \partial D_{NR} \end{cases}$$

s'appelle un problème de conduction.

- Si α est uniforme, ce problème peut se réécrire

$$\begin{cases} \Delta \rho_{\infty} + \theta/\alpha = 0 & \text{dans } D \\ \rho_{\infty} = \rho_{\partial} & \text{sur } \partial D_D \\ -\partial_n \rho_{\infty} = \Phi_{\partial}/\alpha + h/\alpha \rho_{\infty} & \text{sur } \partial D_{NR} \end{cases}$$

où $\Delta \rho_{\infty} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \rho_{\infty})$ est le laplacien. Le problème s'appelle alors un problème de Poisson, si $\theta = 0$ c'est un problème de Laplace.

- Les problèmes de conduction n'ont pas nécessairement de solutions analytiques mais les solutions numériques ne sont pas difficiles à obtenir.

Advection stationnaire

- Le problème d'advection stationnaire consiste à chercher ρ_∞ solution de

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho_\infty \vec{v}) = \theta \text{ dans } D \text{ compte tenu que } \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial D$$

- Si $\theta = 0$ et que de plus $\vec{v}$ a la propriété d'être à divergence nulle $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ le problème se ramène alors à la recherche de ρ_∞ tel que

$$\vec{\nabla} \rho_\infty \cdot \vec{v} = 0$$

soit celui des surfaces définies par les positions $\vec{x}$ telles que

$$\rho_\infty(\vec{x}) = \text{Constante}$$

dont la normale est orthogonale au champ de vecteurs $\vec{v}$, c'est à dire *in fine* aux « tubes de courant » de ce champ de vecteur. C'est donc géométriquement clair

- Les problèmes d'advection stationnaires sont des problèmes de géométrie différentielle qui ont cependant l'inconvénient de ne pas être si faciles à résoudre.

Advection instationnaire sans source pour un champ de vitesses à divergence nulle

- Le problème d'advection instationnaire sans source consiste à chercher ρ_∞ solution de

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 ; \rho(t=0, \vec{x}) = \rho_0(\vec{x}) \quad \text{dans } D$$

compte tenu que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{dans } D ; \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \partial D$$

- Sa résolution peut permettre de fournir à la limite $t \rightarrow \infty$ la solution du problème stationnaire mais ce n'est pas assuré. En effet le bilan du transparent 23 dans ce cas devient

$$\frac{d}{dt} \int_D \frac{\rho_T^2}{2} d\vec{x}^3 = 0$$

et donc il n'y a aucune assurance de convergence de ρ vers un ρ_∞ .

Advection instationnaire : illustration

► Si le champ de vitesse est de la forme

$$\vec{v} = \vec{k}_\theta \begin{cases} r \omega & \text{si } r < R \\ R^2 \omega / r & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{où} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{k}_\theta = -\sin \theta \vec{k}_x + \cos \theta \vec{k}_y \\ x = r \cos \theta ; y = r \sin \theta \end{array} \right.$$

et que la densité initiale est

$$\rho_0 = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors la ligne séparant les zones $\rho = 1$ et $\rho = 0$ est située à l'instant t en

$$X \vec{k}_x + Y \vec{k}_y$$

où X et Y sont paramétrés par $y \in \mathbb{R}$ comme

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \text{si } |y| < 0 \begin{pmatrix} -y \sin(\omega t) \\ y \cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad \text{sinon} \quad \begin{pmatrix} -y \sin(R^2/y^2 \omega t) \\ y \cos(R^2/y^2 \omega t) \end{pmatrix}$$

c'est à dire, dans la zone $r > R$, par une spirale d'équation polaire $\theta = \omega t R^2/r^2$ (cf. script Maxima L2advection.wxm).

Lorsque ωt devient grand les valeurs 0 et 1 se alternent rapidement dans le sens des rayons croissants.

Advection et diffusion stationnaire

► Le problème d'advection-diffusion stationnaire consiste à chercher ρ_∞ solution de (avec $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ sur ∂D)

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{\nabla} \rho_\infty) - \vec{\nabla} \cdot (\rho_\infty \vec{v}) + \theta = 0 & \text{dans } D \\ \rho_\infty = \rho_\partial & \text{sur } \partial D_D \\ -\alpha \partial_n \rho_\infty = \Phi_\partial + h \rho_\infty & \text{sur } \partial D_{NR} \end{cases}$$

► Il est intéressant de connaître la solution d'un problème unidirectionnel particulier, soit

$$D = \{z \vec{k}_z + r \vec{k}_r\} \text{ pour } 0 < z < L \text{ et } 0 < r < R$$

dans le cas où

$\partial D_D = \partial D_0 + \partial D_L$ avec D_0, D_L les bases du cylindre

$\partial D_0 = \{r \vec{k}_r\}$ et $\partial D_L = \{r \vec{k}_r + L \vec{k}_z\}$ pour $0 < r < R$

$\rho_\infty = \rho_0$ et ρ_L (uniformes) sur ∂D_0 et ρ_L

$h = 0, \Phi_\partial = 0$ sur $\partial D_l = \{R \vec{k}_r\}$ le bord latéral $\subset \partial D_{NR}$

et finalement pour α uniforme, $\theta = 0$ et $\vec{v} = v \vec{k}_z$

Advection et diffusion stationnaire sans le cas 1D

► Dans ce cas, ρ_∞ ne dépend ni de x , ni de y et donc l'équation d'advection-diffusion se réduit à

$$\alpha \frac{d\rho_\infty}{dz^2} - v \frac{d\rho_\infty}{dz} = 0$$

dont la solution est

$$\rho_\infty = \rho_0 \frac{\exp^{L/\delta} - \exp^{z/\delta}}{\exp^{L/\delta} - 1} + \rho_L \frac{\exp^{z/\delta} - 1}{\exp^{L/\delta} - 1} \quad \text{avec } \delta = \frac{\alpha}{v}$$

► δ est à comparer avec L : si $\delta \gg L$, alors

$$\text{pour } 0 < z < L : \rho_\infty \approx \rho_0 \frac{L-z}{L} b + \rho_L \frac{z}{L}$$

qui est la solution pour $v = 0$: c'est la conduction qui domine.
Si, au contraire $L \gg \delta$, la solution est

$$\rho_\infty \approx \rho_0 + (\rho_L - \rho_0) \exp^{(z-L)/\delta} \quad (\rho_\infty \approx \rho_0 \text{ si } z < L - \delta)$$

c'est l'advection qui domine.

Nombre de Peclet

- ▶ Le cas 1D met en évidence l'importance du facteur $\frac{L}{\delta} = \frac{L v}{\alpha}$
- ▶ Cette importance demeure dans les autres cas, aussi introduit-on le nombre de Peclet

$$Pe = \frac{L |\vec{v}|}{\alpha}$$

où L est une longueur un peu mystérieuse qu'on appelle la « dimension caractéristique » et qui représente l'ordre de grandeur des longueurs dans le domaine D . Si ce nombre est supérieur à 1, l'advection domine, s'il est très inférieur à 1 c'est la conduction qui domine.

▶ Comme α et $\vec{v}$ varient *a priori* dans D il peut y avoir des zones de D où l'advection domine alors que ce sera la conduction dans d'autres.

▶ On voit donc qu'il est possible de construire des situations où la considération des valeurs du nombre de Peclet pose plus de problèmes qu'elle n'en résout ; mais dans les situations simples ces considérations peuvent être utiles.

Équation de sédimentation

- L'équation de sédimentation modélise le dépôt de particules dans un milieu par ailleurs immobile, elle a la forme d'une équation d'advection-diffusion, soit dans un domaine D donné

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{\nabla} \rho) = \theta$$

où ρ est la concentration de particules, α la diffusivité de celles-ci, θ un terme de production (ou consommation) volumique des particules.

- $\vec{v}$ n'est par contre pas une vraie vitesse mais plutôt une vitesse moyenne obtenue par des considérations sur les forces qui s'exercent sur les particules. Si ces forces sont celles de la pesanteur de champ $-g \vec{k}_z$,

$$\vec{v} = -s g \vec{k}_z$$

où s est un coefficient appelé le coefficient de sédimentation.

- Le coefficient s peut être obtenu par des considérations théoriques qui ne seront pas développées dans cette leçon.

Équation de sédimentation

► Cette vitesse $\vec{v}$ n'a pas la propriété qui a été utilisée jusqu'ici que $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ sur ∂D ; aussi les conditions aux limites de type Neumann-Robin sont-elle modifiées pour prendre en compte que le flux de particules est à la fois diffusif et advectif. La condition d'imperméabilité d'une paroi ∂D_{NR} d'écrit

$$-\alpha \partial_n \rho + \rho \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

et ce sera la seule condition utilisée ici, avec cependant également celle de Dirichlet

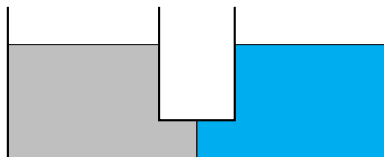
$$\rho = \rho_\partial \text{ sur } \partial D_D$$

pour prendre en compte le fait qu'on peut connaître la concentration de particules en certain endroits.

► L'équation de sédimentation mériterait plus de développements, mais on l'introduit ici juste pour donner des exemples simples d'équation d'advection-diffusion.

Exercice : Diffusion

On connecte une cuve remplie d'eau salée avec une concentration de 30g/l à une autre identique remplie d'eau pure

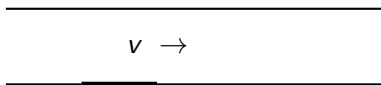


► Dans l'approximation 2D (géométrie cylindrique par rapport à la direction transverse au plan de la feuille), faire une figure comportant des noms de domaines et de bords de domaines et écrire les équations du problème d'évolution de la concentration en spécifiant toutes les variables utilisées.

Pour les illustrations, cf. script FreeFem++ L2diffusion.edp

Exercice : Advection-Diffusion

De l'eau pure circule dans une conduite à une vitesse v constante, elle est mise en contact avec du sel solide dans une partie de la conduite (en gras sur le dessin)

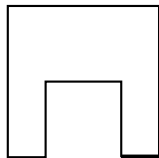


► Dans l'approximation 2D (géométrie cylindrique par rapport à la direction transverse au plan de la feuille) faire une figure comportant des noms de domaines et de bords de domaines et écrire les équations du problème d'évolution de la concentration en spécifiant toutes les variables utilisées.

Pour les illustrations, cf. script FreeFem++ L2Conduite.edp

Exercice : Sédimentation

Un papier essuie-tout (placé entre deux feuilles de plastique pour éviter l'évaporation latérale) est disposé comme indiqué sur la photographie ;



$g \downarrow$



► En supposant que la concentration en eau peut être modélisée par une équation de sédimentation, faire une figure comportant des noms de domaines et de bords de domaines et écrire les équations du problème d'évolution de la concentration en spécifiant toutes les variables utilisées.

Pour les illustrations, cf. script FreeFem++ L2Sedimentation.edp