

Équations macroscopiques de la physique classique



Compléments d'électromagnétisme

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

16 janvier 2015

Objectifs

- ▶ L'électromagnétisme est le corps de discipline qui permet d'expliquer entre autres le fonctionnement des moteurs électriques, des téléphones portable et des cuisinières à induction.
- ▶ Le premier objectif de la leçon est de construire un modèle du chauffage par induction électromagnétique ;
- ▶ Le second est de décrire un dispositif idéal élémentaire d'émission et de réception d'ondes électromagnétiques : le dipole oscillant.

Induction électromagnétique = basses fréquences

Tel que défini leçon No 3, le modèle des basses fréquences en potentiel vecteur magnétique $\vec{a}$ et potentiel scalaire électrique φ dans le cas où la permittivité diélectrique est celle du vide est

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{a} \right) + s \left(\partial_t \vec{a} + \vec{\nabla} \varphi \right) & = & \vec{j}_s \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{a} & = & 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \varphi \right) + \rho & = & 0 \\ \vec{a}(t=0, \vec{x}) & = & \vec{0} \end{array} \right.$$

- ▶ les données sont : $\vec{j}_s$ la densité de courant source ;
 $\mu : E_3 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $s : E_3 \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions de perméabilité et de conductivité électrique ;
- ▶ les grandeurs à calculer sont : $\vec{a}$, φ , ρ à partir desquelles

$$\vec{b} = \vec{\nabla} \times \vec{a} \quad \vec{h} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{a} ; \quad \vec{e} = -\partial_t \vec{a} - \vec{\nabla} \varphi$$

L'utilisation du modèle

- ▶ Ce modèle n'a d'intérêt pratique que si on sait
 - ▶ relier *a priori* $\vec{j}_s$ à un courant électrique source i_s
 - ▶ retirer du modèle des éléments permettant de calculer la tension v_s qui correspond à ce courant
 - ▶ exprimer les effets mécaniques et thermique des courants induits de densité

$$\vec{j} = -s \left(\partial_t \vec{a} + \vec{\nabla} \varphi \right)$$

- ▶ L'objet de ce qui suit est d'établir ce savoir.

Le régime sinusoïdal établi

Si la densité de courant source dépend sinusoïdalement du temps

$$\vec{j}_s(t, \vec{x}) = \sqrt{2} \Re \left\{ \vec{j}_s(\vec{x}) \exp^{j\omega t} \right\}$$

alors $\vec{a}$, φ et ρ comportent une **partie transitoire** dépendant de leurs valeurs initiales qui les amènent vers leur dépendance sinusoïdale de **régime sinusoïdal** établi

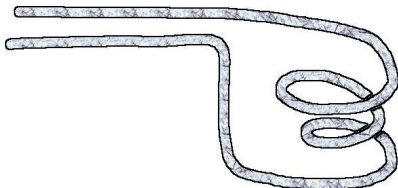
$$\begin{aligned} \vec{a}(t, \vec{x}) &= \sqrt{2} \Re \left\{ \underline{\vec{a}}(\vec{x}) \exp^{j\omega t} \right\} \quad ; \quad \varphi(t, \vec{x}) = \sqrt{2} \Re \left\{ \underline{\varphi}(\vec{x}) \exp^{j\omega t} \right\} \\ \rho(t, \vec{x}) &= \sqrt{2} \Re \left\{ \underline{\rho}(\vec{x}) \exp^{j\omega t} \right\} \end{aligned}$$

Le modèle devient alors

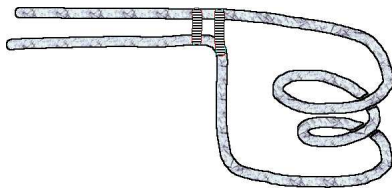
$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) + s \left(j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) &= \underline{\vec{j}}_s \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{a}} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) + \underline{\rho} &= 0 \end{cases}$$

Relation entre densité de courant et courant source

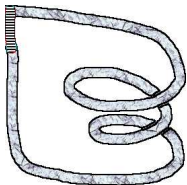
- Une première difficulté est de définir le domaine inducteur dans lequel circule le courant source :



Inducteur avec ses amenées de courant



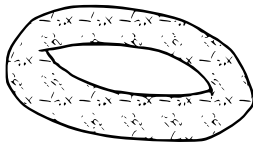
Ajout de deux conducteurs aller et retour l'un sur l'autre



Seul le côté inducteur est considéré ; les amenées coté générateur sont supposées être suffisamment proches pour ne générer aucun champ source.

L'inducteur est un tore

Cette approximation de déconnexion entre les « côtés » inducteur et générateur fait apparaître le domaine de l'inducteur comme un tore D_s



Et la densité de courant source $\vec{j}_s$ peut être supposée déjà satisfaire à

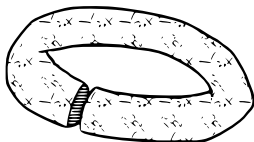
$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s &= 0 & \text{dans } D_s \\ \vec{j}_s &= \vec{0} & \text{dans } E_3 - D_s \text{ le complémentaire de } D_s \text{ dans } E_3 \\ \vec{j}_s \cdot \vec{n} &= 0 & \text{sur } \partial D_s \text{ le bord de } D_s; (\vec{n} \text{ le champ de normales de } \partial D_s \text{ orientées vers l'extérieur de } D_s) \end{aligned}$$

ainsi

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s = 0 \text{ dans } E_3$$

Le tore coupé

Il reste à connecter la densité de courant source $\vec{j}_s$ au courant source $\underline{j}_s$; si le tore est coupé (de façon quelconque pourvu que le tore soit connexifié) suivant une surface Σ de manière qu'un écartement fasse apparaître 2 nouveaux bords Σ_- et Σ_+ dans le tore



Si $\int_{\Sigma} \vec{j}_s \cdot \vec{n} d\vec{x}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Sigma_-} \vec{j}_s \cdot \vec{n} d\vec{x}^2 = - \int_{\Sigma_+} \vec{j}_s \cdot \vec{n} d\vec{x}^2$ on pose

$$\int_{\Sigma} \vec{j}_s \cdot \vec{n} d\vec{x}^2 = \underline{j}_s$$

$\vec{n}$ champ de normales extérieur à D_s coupé ; $d\vec{x}^2$ notation pour l'élément de surface. Cette relation est indépendante de la position de Σ puisque $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s = 0$.

L'espace de cohomologie du tore

Finalement il reste à éliminer toute indétermination sur $\vec{j}_s$; cela peut être fait en lui donnant une régularité maximum avec la condition

$$\vec{\nabla} \times \vec{j}_s = \vec{0} \text{ dans } D_s$$

L'ensemble de ces conditions peuvent être réunies par l'invocation d'un champ $\vec{u}_s$ ne dépendant que de la géométrie de D_s et défini par

$$\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s = 0 & \text{dans } D_s \\ \vec{u}_s = \vec{0} & \text{dans } E_3 - D_s \\ \vec{u}_s \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \partial D_s \end{array} ; \quad \int_{\Sigma_-} \vec{u}_s \cdot \vec{n} d\vec{x}^2 = - \int_{\Sigma_+} \vec{u}_s \cdot \vec{n} d\vec{x}^2 = 1$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{u}_s = \vec{0} \text{ dans } D_s$$

Un tel champ existe et est unique si D_s est un tore : il s'appelle l'élément générateur de l'espace de cohomologie du tore.

La relation cherchée est alors

$$\vec{j}_s = \underline{j}_s \vec{u}_s$$

Le tore axisymétrique

Les vecteurs de base des coordonnées cylindriques sont

$$\vec{k}_r = \cos \theta \vec{k}_1 + \sin \theta \vec{k}_2 \quad ; \quad \vec{k}_\theta = -\sin \theta \vec{k}_1 + \cos \theta \vec{k}_2 \quad ; \quad \vec{k}_z = \vec{k}_3$$

la position est $\vec{x} = r \vec{k}_r + z \vec{k}_z$. Un tore axisymétrique est décrit par

$$D_t = \{r \vec{k}_r + z \vec{k}_3 \text{ avec } (r - R)^2 + z^2 < a^2 \text{ (où } 0 < a < R)\}$$

le champ de vecteur¹

$$\vec{u}_{D_t}(\vec{x}) = \begin{cases} u_{D_t} \vec{k}_\theta & \text{si } \vec{x} \in D_t \\ \vec{0} & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad u_{D_t} = \frac{1}{r \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \frac{\rho d\rho}{R + \rho \cos \phi}}$$

satisfait à

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{u}_{D_t} &= \vec{0} & ; & \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{D_t} = 0 \text{ dans } D_t \\ \vec{u}_{D_t} \cdot \vec{n} &= 0 \text{ sur } \partial D_t & ; & \quad \int_{\Sigma_-} \vec{u}_{D_t} \cdot \vec{n} d\vec{x}^2 = 1 \end{aligned}$$

1. $u_{D_t} = 1/(r 2\pi (R - \sqrt{R^2 - a^2})) \quad (\approx 1/(\pi a^2) \text{ si } a \ll R)$

La construction de $\vec{u}_s$ pour un tore quelconque

On admettra que l'élément générateur de l'espace de cohomologie du tore peut être construit à partir du problème en potentiel sur le tore coupé de la recherche de χ solution de

$$\begin{cases} \Delta\chi = 0 & \text{dans } D_c \text{ coupé} \\ \partial_n\chi = 0 & \text{sur } \partial D_c \text{ non coupé} \\ \chi = 1 & \text{sur } \Sigma_+ \\ \chi = 0 & \text{sur } \Sigma_- \end{cases}$$

et alors

$$\vec{u}_s = \frac{\vec{\nabla}\chi}{\int_{\Sigma} \vec{\nabla}\chi \cdot \vec{n} \, d\vec{x}^2}$$

Une propriété intéressante est que

$$\forall \vec{j} \text{ tel que } \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \text{ dans } D_c : \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} \, d\vec{x}^2 = \frac{\int_{D_c} \vec{u} \cdot \vec{j} \, d\vec{x}^3}{\int_{D_c} |\vec{u}|^2 \, d\vec{x}^3}$$

Le courant à travers Σ s'exprime alors en terme d'intégrales de volume (ce qui est intéressant si on utilise des éléments finis).

Expression des puissances active et réactive (1/2)

Le point de départ est l'équation

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) + s \left(j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) = \underline{i}_s \underline{\vec{u}}_s$$

Le produit scalaire avec $(j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi})^*$ fournit

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) \cdot (j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi})^* + s \left| j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right|^2 = \underline{i}_s \underline{\vec{u}}_s \cdot (j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi})^*$$

La relation d'analyse vectorielle

$$\vec{\nabla} \cdot (\underline{\vec{u}} \times \underline{\vec{v}}) = (\vec{\nabla} \times \underline{\vec{u}}) \cdot \underline{\vec{v}} - (\vec{\nabla} \times \underline{\vec{v}}) \cdot \underline{\vec{u}}$$

permet d'écrire

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) \cdot (j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi})^* &= \vec{\nabla} \cdot \left(\left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) \times (j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi})^* \right) \\ &+ \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \times (j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi})^*}_{= -j\omega \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}^*} \end{aligned}$$

Expression des puissances active et réactive (2/2)

Compte tenu que les champs de vecteur $\vec{a}$ et $\vec{\nabla}\varphi$ sont suffisamment décroissants à l'infini pour que

$$\int_{E_3} \vec{\nabla} \cdot \left(\left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{a} \right) \times (j\omega \vec{a} + \vec{\nabla}\varphi)^* \right) d\vec{x}^3 = 0$$

il vient

$$\underline{i}_s \int_{E_3} \vec{u}_s \cdot (j\omega \vec{a} + \vec{\nabla}\varphi)^* d\vec{x}^3 = \int_{E_3} s |j\omega \vec{a} + \vec{\nabla}\varphi|^2 d\vec{x}^3 - j\omega \int_{E_3} \frac{1}{\mu} |\vec{\nabla} \times \vec{a}|^2 d\vec{x}^3$$

soit encore, en conjuguant, le bilan de puissances

$$\underbrace{\left(\int_{E_3} \vec{u}_s \cdot (j\omega \vec{a} + \vec{\nabla}\varphi) d\vec{x}^3 \right) \underline{i}_s^*}_{=\underline{v}_s} = \underbrace{\int_{E_3} s |j\omega \vec{a} + \vec{\nabla}\varphi|^2 d\vec{x}^3}_{=P} + \underbrace{j\omega \int_{E_3} \frac{1}{\mu} |\vec{\nabla} \times \vec{a}|^2 d\vec{x}^3}_{=Q}$$

Les trois quantités $\underline{v}_s$, P et Q sont

- ▶ $\underline{v}_s$ la force électromotrice dans l'inducteur qui maintient le courant $\underline{i}_s$;
- ▶ P la puissance Joule dissipée dans la ou les charges ;
- ▶ Q la puissance réactive de l'ensemble.

La puissance active

Si le seul domaine conducteur est D_c de conductivité σ

$$s(\vec{x}) = \begin{cases} \sigma & \text{si } \vec{x} \in D_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors

$$P = \int_{D_c} \sigma \left| j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right|^2 d\vec{x}^3$$

soit, compte tenu que

$$\underline{\vec{e}} = -(j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi}) \text{ et } \underline{\vec{j}} = \sigma \underline{\vec{e}}$$

$$P = \int_{D_c} \sigma |\underline{\vec{e}}|^2 d\vec{x}^3 = \int_{D_c} \frac{|\underline{\vec{j}}|^2}{\sigma} d\vec{x}^3$$

qui est bien l'expression attendue : la somme sur le domaine conducteur du rapport du carré de la densité de courant à la conductivité.

La force électromotrice dans l'inducteur (1/3)

Compte tenu que

$$\underline{\vec{e}} = -(j\omega \underline{\vec{a}} + \underline{\vec{\nabla}}\varphi) \text{ et } \vec{u}_s = 0 \text{ en dehors de } D_s$$

la force électromotrice dans l'inducteur est

$$\underline{v}_s = - \int_{D_s} \underline{\vec{e}} \cdot \vec{u}_s \, d\vec{x}^3$$

Si cet inducteur était une spire de fibre moyenne Γ définie par

$$\begin{array}{lll} \vec{X} & : & [0, 1] \longrightarrow E_3 \\ s & \longrightarrow & \vec{X}(s) \end{array} \quad ; \quad \vec{\tau}(s) = \frac{\dot{\vec{X}}(s)}{|\dot{\vec{X}}(s)|} \text{ la tangente}$$

et de section circulaire de rayon a très petit alors au voisinage de cette fibre moyenne

$$\vec{u}_s \approx \frac{1}{\pi a^2} \vec{\tau}$$

de plus

$$\forall f : \int_{D_s} f(\vec{x}) \, d\vec{x}^3 \approx \pi a^2 \int_0^1 f(\vec{X}(s)) \, |\dot{\vec{X}}(s)| \, ds$$

La force électromotrice dans l'inducteur (2/3)

Il vient donc que

$$\underline{v}_s \approx - \int_0^1 \underline{\vec{e}} \left(\vec{X}(s) \right) \cdot \vec{\tau} \, ds = - \int_{\Gamma} \underline{\vec{e}} \cdot \vec{\tau} \, d|\vec{x}|$$

la forme symbolique de cette expression suggère l'utilisation de la formule de Stokes : si Γ est le bord d'une surface S munie d'un champ de normales $\vec{n}$

$$\underline{v}_s \approx - \int_S \vec{\nabla} \times \underline{\vec{e}} \cdot \vec{n} \, d\vec{x}^2$$

Compte tenu de la relation de Maxwell-Faraday $\vec{\nabla} \times \underline{\vec{e}} = -j\omega \underline{\vec{b}}$

$$\underline{v}_s \approx j\omega \int_S \underline{\vec{b}} \cdot \vec{n} \, d\vec{x}^2$$

la force électromotrice est en écriture d'amplitudes complexes la dérivée temporelle du flux de l'induction magnétique à travers la surface dont la spire est le bord. Elle vient compenser la force contre-électromotrice qui est l'opposée de cette quantité.

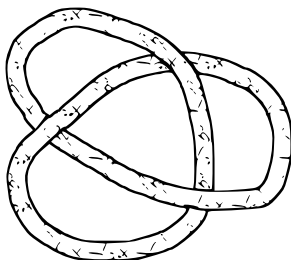
La force électromotrice dans l'inducteur (3/3)

L'analyse précédente a été faite pour montrer que

$$\underline{v}_s = - \int_{D_s} \underline{\vec{e}} \cdot \underline{\vec{u}}_s d\vec{x}^3$$

correspondait à ce qu'on attendait d'une force électromotrice dans le cadre d'une approximation où le résultat était connu *a priori* ; mais bien cette expression qui est première parce que :

- ▶ les inducteurs ne sont pas nécessairement de section petite ;
- ▶ même s'ils l'étaient il pourraient avoir une forme où la formule de Stokes ne s'applique pas, par exemple sur un nœud



La puissance réactive

Dès lors que $\underline{v}_s$ est identifiée à une force électromotrice, la partie imaginaire de $\underline{v}_s i_s^*$ est la puissance réactive. De plus l'examen de sa forme explicite

$$Q = \omega \int_{E_3} \frac{1}{\mu} |\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}|^2 d\vec{x}^3$$

soit encore (compte tenu que $\underline{\vec{b}} = \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}$)

$$Q = \omega \int_{E_3} \frac{|\underline{\vec{b}}|^2}{\mu} d\vec{x}^3$$

la fait apparaitre comme le produit de la pulsation par le double de la moyenne quadratique temporelle de l'énergie magnétique

$$\int_{E_3} \frac{|\underline{\vec{b}}|^2}{2\mu} d\vec{x}^3$$

ce qui est conforme à l'idée qu'on s'en fait.

Le rôle du potentiel scalaire électrique

Le modèle complet

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) + s \left(j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) &= \underline{\vec{j}}_s \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{a}} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) + \underline{\rho} &= 0 \end{cases}$$

se découple en deux parties : d'abord

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) + s \left(j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) &= \underline{\vec{j}}_s \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{a}} &= 0 \end{cases}$$

dans laquelle le potentiel scalaire électrique $\underline{\varphi}$ est une variable annexe définie uniquement dans D_c dont la fonction est d'assurer la cohérence de la 1^o équation et ensuite

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) + \underline{\rho} = 0$$

pour laquelle le statut de potentiel scalaire électrique est rendu à $\underline{\varphi}$ de part son lien avec la densité de charge électrique ρ .

Le potentiel électrique dans un domaine conducteur

La divergence de $\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) + s \left(j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) = \underline{\vec{j}}_s$ s'écrit

$$\vec{\nabla} \cdot \left(s \left(j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) \right) = 0$$

Si le domaine conducteur est comme précédemment un domaine D_c et donc si s est une fonction discontinue (valant σ dans D_c et 0 ailleurs) il faut que (compte tenu que $\vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{a}} = 0$)

$$\vec{\nabla} \cdot \underline{\varphi} = 0 \text{ dans } D_c \text{ et } \left(j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial D_c$$

où ∂D_c est le bord de D_c et $\vec{n}$ un champ de normales extérieures. Ces conditions sur $\underline{\varphi}$ dans D_c et sur ∂D_c signifient que le courant induit

$$\underline{\vec{j}} = s \left(-j\omega \underline{\vec{a}} - \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right)$$

est à divergence nulle dans D_c et que de plus ce courant ne « sort pas » de D_c .

Le potentiel scalaire électrique dans E_3

Le potentiel scalaire électrique est de plus solution de

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi}) + \underline{\rho} = 0 \text{ dans } E_3$$

ce qui impose

$$\rho = 0 \text{ dans } D_c$$

L'intérieur d'un conducteur électrique est électriquement neutre (comme en électrostatique).

Avec l'hypothèse qu'il n'y a pas de charges électriques en dehors du conducteur²

$$\rho = 0 \text{ dans } E_3 - D_c$$

il ne reste comme possibilité pour les charges électriques que d'être réparties en surface de ∂D_c .

2. Cet extérieur est assimilé à un vide total ; sinon il pourrait y en avoir.

La conservation du courant induit

le potentiel $\underline{\varphi}$ peut être calculé sur $E_3 - D_c$ par le problème

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi}) = 0 & \text{dans } E_3 - D_c \\ \underline{\varphi}|_{\text{côté } E_3 - D_c} = \underline{\varphi}|_{\text{côté } D_c} & \text{sur } \partial(E_3 - D_c) = \partial D_c \end{cases}$$

Ainsi la densité superficielle de charges (C/m^2) sur ∂D_c est

$$\rho_s = \epsilon_0 \left(\partial_n \underline{\varphi}|_{\text{côté } D_c} - \partial_n \underline{\varphi}|_{\text{côté } E_3 - D_c} \right)$$

Ce qui assure la conservation du courant induit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + j\omega \rho = 0$$

la densité de charge est alors une distribution de la forme

$$\rho(\vec{x}) = \rho_s \delta_{\partial D_c}$$

dans le sens que

$$\forall \psi : \int_{E_3} \rho \psi \, d\vec{x}^3 = \int_{\partial D_c} \rho_s \psi \, d\vec{x}^2$$

Les effets capacitifs

Les statuts des potentiel scalaire électrique $\underline{\varphi}$ et densité de charge $\underline{\rho}$ étant définis, si

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi}) + \underline{\rho} = 0 \text{ dans } E_3$$

alors

$$\int_{E_3} \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi}) \underline{\varphi}^* d\vec{x}^3 + \int_{E_3} \underline{\rho} \underline{\varphi}^* d\vec{x}^3 = 0$$

d'où

$$\int_{\partial D_c} \underline{\rho}_s \underline{\varphi}^* d\vec{x}^2 = \int_{E_3} \epsilon_0 |\vec{\nabla} \underline{\varphi}|^2 d\vec{x}^3$$

c'est le double de la moyenne quadratique temporelle de l'énergie électrostatique.

La puissance correspondant aux effets capacitifs est alors

$$Q' = \omega \int_{E_3} \epsilon_0 |\vec{\nabla} \underline{\varphi}|^2 d\vec{x}^3 = \omega \int_{\partial D_c} \underline{\rho}_s \underline{\varphi}^* d\vec{x}^2$$

Le modèle d'induction formulé en courant source (1/4)

Si le courant source $\underline{i}_s$, la géométrie du tore D_s approximant l'inducteur ainsi que celle du domaine conducteur D_c qui est le lieu des courants induits sont donnés ainsi que la valeur σ de la conductivité électrique dans D_c (donc la fonction de conductivité s est définie) alors :

► l'élément générateur de l'espace de cohomologie de l'inducteur est calculé par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \times \vec{u}_s = \vec{0} ; \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s = 0 & \text{dans } D_s \\ \vec{u}_s = \vec{0} & \text{dans } E_3 - D_s \\ \vec{u}_s \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \partial D_s \end{array} \right.$$

► la densité de courant source est

$$\vec{j}_s = \underline{i}_s \vec{u}_s$$

Le modèle d'induction formulé en courant source (2/4)

- Le potentiel vecteur magnétique $\underline{\vec{a}}$ (défini dans E_3) et la partie du potentiel scalaire électrique qui est définie dans D_c sont solutions de

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) + s \left(j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) &= \underline{\vec{j}}_s \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{a}} &= 0 \end{cases}$$

- La partie du potentiel scalaire électrique définie dans $E_3 - D_c$ se calcule par

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi}) + \rho = 0 & \text{dans } E_3 - D_c \\ \underline{\varphi}|_{\text{côté } E_3 - D_c} = \underline{\varphi}|_{\text{côté } D_c} & \text{sur } \partial(E_3 - D_c) = \partial D_c \end{cases}$$

et la densité superficielle de charges électriques est

$$\rho_s = \epsilon_0 \left(\partial_n \underline{\varphi}|_{\text{côté } D_c} - \partial_n \underline{\varphi}|_{\text{côté } E_3 - D_c} \right)$$

Le modèle d'induction formulé en courant source (3/4)

- La force électromotrice dans l'inducteur est maintenant

$$\underline{v}_s = - \int_{D_s} \underline{\vec{e}} \cdot \underline{\vec{u}}_s \, d\vec{x}^3$$

Les puissances active et réactive-inductive peuvent être calculées de deux façons, sur l'inducteur et directement sur la charge et dans l'espace par

$$P + j Q = \underline{v}_s \underline{i}_s^* = \int_{D_c} \sigma \left| j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right|^2 \, d\vec{x}^3 + j \omega \int_{E_3} \frac{1}{\mu} \left| \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right|^2 \, d\vec{x}^3$$

La puissance réactive-capacitive peut être calculée également de deux façons

$$Q' = \omega \int_{E_3} \epsilon_0 \left| \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right|^2 \, d\vec{x}^2 = \omega \int_{\partial D_c} \underline{\rho}_s \underline{\varphi}^* \, d\vec{x}^2$$

Le modèle d'induction formulé en courant source (4/4)

- La résistance de l'inducteur est prise en compte de façon externe au modèle par une formule du type

$$R_s = \frac{\text{longueur fibre moyenne}}{\text{conductivité} \times \text{surface de passage du courant}} \\ \text{compte tenu de l'effet Kelvin}$$

- L'inductance du dispositif inducteur+charge est

$$Z = R_s + \frac{P + (Q - Q')j}{|\underline{\dot{I}}_s|^2}$$

c'est la grandeur utile pour dimensionner l'alimentation électrique.

- La densité de puissance Joule dans la charge q (en W/m^3) est

$$q = \sigma \left| j\omega \underline{\vec{a}} + \underline{\vec{\nabla}}\varphi \right|^2$$

c'est la grandeur utile d'entrée d'un modèle de transfert de chaleur.

Mécanique

► Comme la possibilité d'un mouvement n'a pas été introduite dans le problème d'induction posé au départ, on ne trouve pas de puissance mécanique.

► L'analyse des milieux en mouvement se fait en modifiant la loi d'Ohm comme

$$\vec{j} = s \left(\vec{e} + \vec{v} \times \vec{b} \right)$$

où $\vec{v}$ est le champ de vitesses eulérien de ce mouvement. L'analyse correspondant à cette modification est faite Leçon 7 de TIEM sous Arche et son résultat principal est que la densité de force électromagnétique dans tout l'espace est de la forme

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{b} + \vec{j}_s \times \vec{b} + \frac{\vec{b}^2}{2} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{\mu} \right)$$

qui est la divergence du tenseur des efforts de Maxwell

$$\overline{\overline{T}}_{ik} = \frac{b_i b_k}{\mu} - \delta_{ik} \frac{b_l b_l}{2\mu}$$

Ondes électromagnétiques = hautes fréquences

- Sous la condition de conservation de la charge électrique

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

les potentiels scalaire électrique φ et vecteur magnétique $\vec{a}$ sont également solutions de

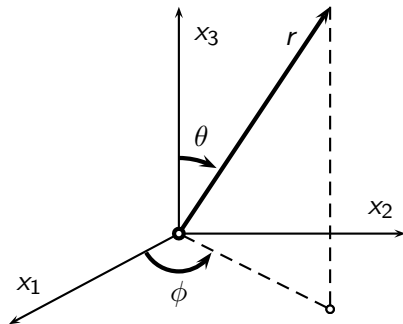
$$\vec{\square} \vec{a} = \mu_0 \vec{j} \quad ; \quad \square \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

où

$$\square \phi = \frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \phi - \Delta \phi \quad ; \quad \vec{\square} \vec{a} = \frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \vec{a} - \vec{\Delta} \vec{a}$$

- La question est de décrire le mode de production des ondes électromagnétique, c'est à dire ρ et $\vec{j}$. Le plus élémentaire d'entre eux, à partir duquel il est possible d'en construire des dispositifs réel, est le dipole oscillant.

Système de coordonnées



$$\begin{cases} x_1 &= r \sin \theta \cos \phi \\ x_2 &= r \sin \theta \sin \phi \\ x_3 &= r \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{k}_r &= \sin \theta (\cos \phi \vec{k}_1 + \sin \phi \vec{k}_2) + \cos \theta \vec{k}_3 \\ \vec{k}_\theta &= \cos \theta (\cos \phi \vec{k}_1 + \sin \phi \vec{k}_2) - \sin \theta \vec{k}_3 \\ \vec{k}_\phi &= -\sin \phi \vec{k}_1 + \cos \phi \vec{k}_2 \end{cases}$$

Onde produite par un dipôle élémentaire rayonnant

► Un brin de fil conducteur de l'électricité de longueur L à section circulaire de rayon d est considéré. Un courant électrique parcourt le brin de fil dans le sens de sa longueur, les sources sont alors

$$\vec{j}(t, \vec{x}) = i(t) \vec{k}_3 \begin{cases} 1/(\pi d^2) & \text{si } x_1^2 + x_2^2 < d^2 \text{ et } -L/2 < x_3 < L/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\rho(t, x) = q(t) (\delta(\vec{x}, L/2) - \delta(\vec{x}, -L/2))/(\pi d^2)$$

où

► $\delta(\vec{x}, u)$ est la distribution de Dirac définie par : si ψ est une fonction test scalaire définie sur E_3

$$\forall \psi : \int_{E_3} \psi(\vec{x}) \delta(\vec{x}, u) dx^3 = \begin{cases} \psi(x_1 \vec{k}_1 + x_2 \vec{k}_2 + u \vec{k}_3) & \text{si } x_1^2 + x_2^2 < d^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

► Le courant i le long du brin de fil et la charge électrique q des deux extrémités du brin sont liés par

$$\frac{dq}{dt} = i \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \partial_t \rho = 0$$

de manière que la jauge de Lorentz $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \frac{1}{c^2} \partial_t \varphi = 0$ soit vérifiée.

Onde produite par un dipôle élémentaire : 1^o approximation

- Un tel système n'est concevable que sur le papier : toutefois des antennes existant réellement peuvent être approchés par la superposition de tels dipôles élémentaires et elles ont un comportement très voisin de celui de leur composant élémentaire.
- Au loin du dipôle $|\vec{x}| \gg L, d$, les potentiels vecteur magnétique et scalaire électrique prennent la forme

$$\vec{a}(t, \vec{x}) \approx \frac{\mu_0 L}{4\pi} i \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right) \frac{\vec{k}_3}{|\vec{x}|}$$

$$\varphi(t, \vec{x}) \approx \frac{L}{4\pi\epsilon_0} (\vec{x} \cdot \vec{k}_3) \left(\frac{q \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right)}{|\vec{x}|^3} + \frac{i \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right)}{c |\vec{x}|^2} \right)$$

Ces approximations satisfont exactement la jauge de Lorenz. Elles comportent des termes qui peuvent se classer en puissances croissantes de $1/|\vec{x}|$.

3° approximation : l'onde plane

- Une approximation supplémentaire est encore possible, si

$$\vec{x} = X \vec{k}_1 + \delta\vec{x} \quad \text{avec } |\delta\vec{x}| \ll X$$

i.e. $|X \vec{k}_1 + \delta\vec{x}| \approx X + \delta x_1$ à l'ordre 1 en $|\delta\vec{x}|$

alors les champs magnétique et électrique deviennent

$$\vec{h}(t, X \vec{k}_1 + \delta\vec{x}) \approx \frac{L}{4\pi c X} \frac{di}{dt} \left(t - \frac{X}{c} - \frac{\delta x_1}{c} \right) \vec{k}_2$$
$$\vec{e}(t, X \vec{k}_1 + \delta\vec{x}) \approx -\frac{\mu_0 L}{4\pi X} \frac{di}{dt} \left(t - \frac{X}{c} - \frac{\delta x_1}{c} \right) \vec{k}_3$$

Ils ne dépendent plus que de δx_1 la coordonnée selon la direction $\vec{k}_1$ de $\delta\vec{x}$.

Onde plane

- Si l'amplitude du champ magnétique

$$f(x) = \frac{L}{4\pi c X} \frac{di}{dt} \left(t - \frac{X}{c} \right)$$

est choisie comme entrée plutôt que le courant i alors l'onde plane est définie par

$$\begin{cases} \vec{h}'(t, \vec{x}') = f\left(t - \frac{x'_1}{c}\right) \vec{k}_2 \\ \vec{e}'(t, \vec{x}') = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} f\left(t - \frac{x'_1}{c}\right) \vec{k}_3 \end{cases}$$

et

$$\vec{h}(t, X \vec{k}_1 + \delta\vec{x}) \approx \vec{h}'(t, \delta\vec{x}) \quad ; \quad \vec{e}(t, X \vec{k}_1 + \delta\vec{x}) \approx \vec{e}'(t, \delta\vec{x})$$

Ce qui fait apparaître l'onde plane comme une approximation locale au voisinage de $X \vec{k}_1$ de l'onde générée par le dipole.

L'onde du dipôle

► Si $|\vec{x}| \ll d, L$ et que la 1^o approximation des potentiels

$$\vec{a}(t, \vec{x}) \approx \frac{\mu_0 L}{4\pi} i \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right) \frac{\vec{k}_3}{|\vec{x}|}$$

$$\varphi(t, \vec{x}) \approx \frac{L}{4\pi\epsilon_0} (\vec{x} \cdot \vec{k}_3) \left(\frac{q \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right)}{|\vec{x}|^3} + \frac{i \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right)}{c |\vec{x}|^2} \right)$$

est retenue alors les champs électriques et magnétiques correspondant sont

$$\vec{h}(t, \vec{x}) \approx -\frac{L}{4\pi c} \frac{di}{dt} \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right) \frac{\vec{x} \times \vec{k}_3}{|\vec{x}|^2}$$

$$\vec{e}(t, \vec{x}) \approx -\frac{\mu_0 L}{4\pi} \frac{di}{dt} \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right) \frac{1}{|\vec{x}|} \left(\vec{k}_3 - \frac{\vec{k}_3 \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^2} \vec{x} \right)$$

► Ces champs électriques et magnétiques définissent l'onde émise par le dipôle oscillant. Et cette onde est appelée un rayonnement.

Puissance du rayonnement

- La puissance que le dispositif qui impose le courant i dans le brin de fil du dipôle contribue à augmenter l'énergie électromagnétique dans tout l'espace (supposé vide).
- Cette énergie s'écrit *a priori*

$$W(t) = \int_{E_3} \left(\frac{1}{2} \mu_0 (\vec{h}(t, \vec{x}))^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 (\vec{e}(t, \vec{x}))^2 \right) d\vec{x}^3$$

- La puissance instantanée qui correspond à l'énergie électromagnétique est

$$p(t) = \frac{dW}{dt}(t)$$

- Mais il n'est pas possible d'appliquer *verbatim* cette façon de procéder parce les expressions de $\vec{e}$ et $\vec{h}$ ne sont valables qu'à des distances $|\vec{x}|$ grandes devant les dimensions du dipôle alors que l'intégration s'étend jusqu'à lui.

Tactique d'évitement de la difficulté

► Il faudrait donc revenir sur l'approximation de $\vec{e}$ et $\vec{h}$ afin de retrouver des expressions valables dans le dipôle, mais il est possible d'exploiter les propriétés de propagation de l'énergie électromagnétique pour éviter ce travail.

► Une sphère de rayon R centrée sur l'origine (ou se trouve le dipôle) étant définie, l'extérieur de cette sphère est noté

$$D(R) = \{\vec{x} \in E_3 \text{ tq } |\vec{x}| > R\}$$

► La partie de l'énergie électromagnétique totale contenue dans D est

$$W_D(t, R) = \int_{D(R)} \left(\frac{1}{2} \mu_0 (\vec{h}(t, \vec{x}))^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 (\vec{e}(t, \vec{x}))^2 \right) d\vec{x}^3$$

► Si $R \gg L, d$ alors les expressions de $\vec{e}$ et $\vec{h}$ peuvent être utilisées dans $D(R)$ et tous calculs faits

$$W_D(t, R) = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{L^2}{(2\pi)^2 c} \int_R^\infty \left(\frac{di}{dt} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)^2 dr$$

Puissance rayonnée

► Puisque formellement

$$\int_R^\infty \left(\frac{di}{dt} \left(t + \Delta t - \frac{r}{c} \right) \right)^2 dr = \int_{R-c\Delta t}^\infty \left(\frac{di}{dt} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)^2 dr$$

il devient possible d'obtenir l'énergie totale à l'instant t

$$W(t) = W_D(t, 0)$$

par l'énergie dans D à un instant ultérieur $t + R/c$, soit

$$W(t) = W_D(t+R/c, R) = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{L^2}{(2\pi)^2 c} \int_R^\infty \left(\frac{di}{dt} \left(t - \frac{r-R}{c} \right) \right)^2 dr$$

► d'où par changement de variable entre r et $\alpha = t - (r - R)/c$

$$W(t) = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{L^2}{(2\pi)^2 c} \int_{-\infty}^t \left(\frac{di}{dt}(\alpha) \right)^2 \frac{d\alpha}{c}$$

► La puissance rayonnée est alors

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{L^2}{(2\pi c)^2} \left(\frac{di}{dt}(t) \right)^2$$

Puissance rayonnée

- Pour un rayonnement monochromatique

$$i(t) = \sqrt{2} \Re\{\underline{I} \exp^{i\omega t}\} \text{ avec } (\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T})$$

Cette puissance devient

$$p(t) = P + \text{terme fluctuant en } 2\omega$$

avec

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{L^2}{(cT)^2} |\underline{I}|^2 = R_{\text{ray}} |\underline{I}|^2$$

- La « résistance de rayonnement » est définie par

$$R_{\text{ray}} = \frac{2\pi}{3} z_0 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2$$

l'expression comporte la longueur d'onde et l'impédance caractéristique du vide

$$\lambda = c T ; z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$$

Direction de rayonnement

- Le rayonnement du dipôle oscillant se fait radialement mais pas de façon isotrope.
- Pour mettre ceci en évidence commodément il est intéressant d'introduire le vecteur de Poynting. En partant de

$$\frac{dW_D}{dt} = \int_{D(R)} \left(\mu_0 \vec{h}(t, \vec{x}) \cdot \partial_t \vec{h}(t, \vec{x}) + \epsilon_0 \vec{e}(t, \vec{x}) \cdot \partial_t \vec{e}(t, \vec{x}) \right) d\vec{x}^3$$

par injection directe des relations de Maxwell-Faraday, de Maxwell-Ampère et en tenant compte de ce que D ne comporte aucune source, il vient

$$\frac{dW_D}{dt} = \int_{D(R)} \left(-\vec{h}(t, \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \times \vec{e}(t, \vec{x}) + \vec{e}(t, \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \times \vec{h}(t, \vec{x}) \right) d\vec{x}^3$$

Vecteur de Pointing (1/2)

- en utilisant successivement la relation d'analyse vectorielle

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{h} \times \vec{e}) = \vec{e} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{h} - \vec{h} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{e}$$

et le théorème de Green-Ostrogradsky, il vient

$$\frac{dW_D}{dt} = \int_{\partial D(R)} \vec{h}(t, \vec{x}) \times \vec{e}(t, \vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) d\vec{x}^2$$

où

$$\partial D(R) = \{\vec{x} \text{ tq } \vec{x}^2 = R^2\} ; \vec{n}(\vec{x}) = -\vec{x}/|\vec{x}|$$

sont les bord de $D(R)$ et normale sortante à ce bord.

- $\frac{dW_D}{dt}$ est la puissance entrant dans W_D à l'instant t , aussi peut-on accepter l'idée que le vecteur de Poynting

$$\vec{s}(\vec{x}, t) = \vec{e}(\vec{x}, t) \times \vec{h}(\vec{x}, t)$$

soit tel que sa densité de flux sur une surface

$$p = \vec{s}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}$$

représente la densité de puissance sortant par cette surface.

Vecteur de Pointing (2/2)

- Le vecteur de Pointing

$$\vec{s}(\vec{x}, t) = \vec{e}(\vec{x}, t) \times \vec{h}(\vec{x}, t)$$

quantifie la répartition de la puissance rayonnée totale par rapport à la direction à partir de l'expression

$$\frac{dW_D}{dt} = \int_{\partial D(R)} \vec{s}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}) d\vec{x}^2$$

- Mais il est possible d'ajouter une quantité $q(\vec{x})$ quelconque telle que

$$\int_{\partial D(R)} q(\vec{x}) d\vec{x}^2 = 0$$

sans modifier cette puissance.

- Aussi l'utilisation du vecteur de Pointing est-elle susceptible de révision.

Direction de rayonnement

► L'application du résultat sur la puissance sortante du complémentaire de de $D(R)$ (qui est l'inverse de la puissance entrant dans $D(R)$ et conduit à un changement de signe de la normale), il vient, toujours en utilisant

$$\begin{aligned}\vec{h}(t, \vec{x}) &\approx -\frac{L}{4\pi c} \frac{di}{dt} \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right) \frac{\vec{x} \times \vec{k}_3}{|\vec{x}|^2} \\ \vec{e}(t, \vec{x}) &\approx -\frac{\mu_0 L}{4\pi} \frac{di}{dt} \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right) \frac{1}{|\vec{x}|} \left(\vec{k}_3 - \frac{\vec{k}_3 \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^2} \vec{x} \right)\end{aligned}$$

ainsi que les coordonnées sphériques

$$p(\theta, \phi, t) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{L^2}{(2\pi c)^2} \left(\frac{di}{dt} (t - R/c) \right)^2 \frac{(\sin \theta)^2}{R^2}$$

dont l'intégrale sur le bord de la sphère est bien sûr la puissance totale trouvée précédemment

$$P(t) = \int_0^{2\pi} R d\phi \int_0^\pi R \sin \theta d\theta p(\theta, \phi, t)$$

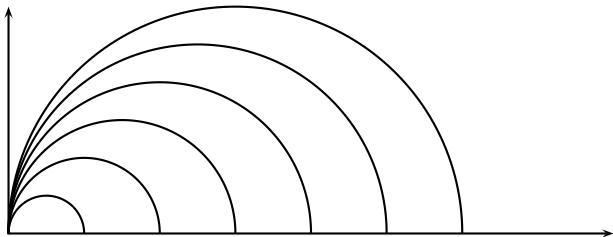
Direction de rayonnement

- La puissance rayonnée

$$p(\theta, \phi, t) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{L^2}{(2\pi c)^2} \left(\frac{di}{dt}(t - R/c) \right)^2 \frac{(\sin \theta)^2}{R^2}$$

ne dépend pas de la composante suivant ϕ (ce qui est cohérent avec la symétrie axisymétrique du dipôle) et dépend de $\sin \theta$.

- C'est principalement dans les directions orthogonales à la direction $\vec{k}_3$ que rayonne le dipôle oscillant.



Émission et réception

- Si un brin de géométrie identique à celui qui a été décrit pour définir le dipôle élémentaire de Hertz est situé à la position $\vec{x}$ et est dirigé suivant une direction $\vec{k}$;
- Si ce brin est fait d'un matériau conducteur de l'électricité qui impose la loi d'Ohm en tous points du brin, alors le courant induit sera

$$\vec{j}_i(t, \vec{x}) = \sigma (\vec{e}(t, \vec{x}) + \vec{e}_i(t, \vec{x}))$$

où $\vec{e}$ est le champ électrique incident

$$\vec{e}(t, \vec{x}) \approx -\frac{\mu_0 L}{4\pi} \frac{di}{dt} \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right) \frac{1}{|\vec{x}|} \left(\vec{k}_3 - \frac{\vec{k}_3 \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^2} \vec{x} \right)$$

et $\vec{e}_i$ est le champ électrique de réaction d'induit dans le brin.

Émission et réception

- Dans le cas limite où le brin est fait d'un matériau très conducteur alors

$$\sigma \longrightarrow \infty \text{ et } |\vec{j}_i| < \infty \implies \vec{e}_i(t, \vec{x}) = -\vec{e}(t, \vec{x})$$

le champ électrique de réaction d'induit est connu dans le brin : il s'oppose au champ source et crée une différence de potentiel entre les deux extrémités du brin qui peut servir de signal d'entrée à un récepteur.

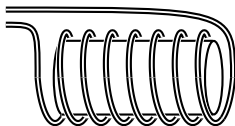
- Quantitativement cette différence de potentiel est (lorsque le champ électrique ne varie presque pas sur la longueur du brin)

$$V \approx \vec{e}_i \cdot L \vec{k} = -\frac{\mu_0 L^2}{4\pi} \frac{di}{dt} \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right) \frac{(\vec{x} \times \vec{k}_3) \cdot (\vec{x} \times \vec{k})}{|\vec{x}|^3}$$

- Comme c'était prévisible, elle est maximale pour $\vec{k}$ aligné à $\vec{k}_3$ et $\vec{x}$ orthogonal à $\vec{k}_3$ et elle décroît en l'inverse du cube de la distance qui sépare les deux brins.

Exercice : chauffage de billette

Fournir un modèle de calcul dont la variable d'état est la composante orthoradiale du potentiel vecteur pour un dispositif constitué d'une bobine à l'intérieur de laquelle se trouve une billette



en supposant que

- ▶ l'inducteur est composé de N spires axisymétriques de même axe dans lesquels circule le même courant ;
- ▶ que la charge est également axisymétrique (de même axe que les spires) ;

En géométrie cylindrique $\vec{x} = r \vec{k}_r + z \vec{k}_z$ on a

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \left(a(r, z) \vec{k}_\theta \right) &= -\partial_z a \vec{k}_r + \frac{1}{r} \partial_r (r a) \vec{k}_z \\ \vec{\nabla} \times (b_r \vec{k}_r + b_z \vec{k}_z) &= (\partial_z b_r - \partial_r b_z) \vec{k}_\theta\end{aligned}$$

Exercices ondes

Exercice 1 : Une formule pratique utilisée dans une norme propose déterminer l'intensité du champ électrique « au loin » dû au rayonnement d'une antenne est

$$\text{Champ électrique en V/m} = \underbrace{7}_{\text{en } \sqrt{\Omega}} \frac{\sqrt{\text{Puissance effective rayonnée en W}}}{\text{distance à l'antenne en m}}$$

critiquer cette formule.

Exercice 2 : Examiner l'onde générée par un réseau de dipôles oscillants tous parallèles, de longueur L et disposés en $n a \vec{k}_2$ pour $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2 \dots$ où a est une longueur de pas.