

Partie V. Théories sur la nature des particules élémentaires chargées ^[1]

(p. 184) p.749

^[1]Le numéro de page entre parenthèses se réfère à l'édition anglaise chez Dover, l'autre numéro à l'édition allemande de l'Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

63. L'électron et la théorie de la relativité restreinte

Pendant longtemps, des efforts ont été faits pour obtenir toutes les propriétés mécaniques de l'électron à partir de principes électromagnétiques. Dans un tel cas, l'équation de mouvement

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{K} \quad (463)$$

(où $\mathbf{G}$ = moment de l'électron ^[2], $\mathbf{K}$ = force *extérieure*) est interprétée comme suit³⁷⁴ : on postule tout d'abord que toutes les forces agissant sur l'électron sont d'origine électromagnétique, c'est-à-dire qu'elles sont données par l'expression de Lorentz (212a) ^[3] ; ensuite que la force totale agissant sur un électron doit toujours s'annuler,

$$\int \rho \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}) \right\} dV = 0, \quad (464)$$

^[2]Plutôt que l'emploi du terme quantité de mouvement, on adhère à la forme anglaise « moment ». ^[3](215) dans l'édition allemande, corrigé dans la traduction anglaise.

où l'intégration porte sur le volume de l'électron. Cette force totale peut être séparée en deux termes. L'un est la force due au champ extérieur

$$\int \rho \left\{ \mathbf{E}^{\text{ext}} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}^{\text{ext}}) \right\} dV = \mathbf{K}$$

qui agit dans le membre de droite de (463). L'autre est la force exercée par l'électron sur lui-même, que l'on peut rendre égale à

$$\int \rho \left\{ \mathbf{E}^{\text{int}} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}^{\text{int}}) \right\} dV = -\frac{d\mathbf{G}}{dt}.$$

Dans cette expression, $\mathbf{G}$ est interprété comme le moment électromagnétique du champ propre de l'électron. Pour des accélérations pas trop importantes (mouvement quasi-stationnaire), il peut être considéré comme le moment correspondant à un mouvement uniforme de l'électron avec la vitesse instantanée correspondante. Il dépend bien sûr de la distribution de charge à l'intérieur de l'électron.

L'hypothèse la plus naturelle qui se présentait était celle d'un électron parfaitement rigide. Une telle théorie a été élaborée de manière complète par

³⁷⁴Cf. note de bas de page 4, p. 1, H. A. Lorentz, *ibid.*, § 21.

p. 185

[4] On présente de nos jours la masse comme un invariant et la dépendance en fonction de la vitesse comme un effet cinématique.

Abraham³⁷⁵. Cependant, en 1904, H. A. Lorentz³⁷⁶ a montré que les déductions que l'on pouvait tirer de la dépendance en fonction de la vitesse du moment de l'électron ne seraient en accord avec le principe de relativité que si l'on suppose qu'une contraction de l'électron opère dans la direction du mouvement, dans un rapport $\sqrt{1 - \beta^2} : 1$. Et Einstein³⁷⁷ a ensuite montré que les dépendances de la masse^[4], de l'énergie et du moment en fonction de la vitesse découlent du seul principe de relativité, sans recours à d'autres hypothèses sur la nature de l'électron (cf. § 29). Par conséquent, en retour, on ne peut déduire d'observations sur le changement de masse aucune information sur la nature de l'électron.

Il est cependant facile de voir que le principe de relativité doit nécessairement conduire à l'existence d'une énergie de nature autre qu'électromagnétique pour l'électron, du moins tant que la théorie de Maxwell-Lorentz est retenue. Cela a tout d'abord été remarqué par Abraham³⁷⁸. Supposons dans un premier temps que la distribution de charge dans un électron stationnaire soit à symétrie sphérique. On obtient alors l'énergie et le moment d'un électron en mouvement par (351), si ces quantités sont bien d'origine électromagnétique et données par les expressions de Maxwell-Lorentz,

$$\mathbf{G} = \mathbf{u} \frac{\frac{4}{3}(E_0/c^2)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad E = \frac{E_0(1 + \frac{1}{3}u^2/c^2)}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (351)$$

Si ces expressions représentaient bien l'énergie totale et le moment, nous aurions, à partir de (317), (318),

$$E = \int \left(\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{G}}{dt} \right) dt = \int \left(\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{G}}{d\beta} \right) d\beta.$$

Ce n'est toutefois pas le cas. L'intégrale dans le terme de droite prend en effet la valeur

$$\frac{\frac{4}{3}E_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \text{const.}$$

Si, au contraire de l'énergie, le *moment* est supposé de nature purement électromagnétique, les énergies totales, $\bar{E}_0$ et $\bar{E}$, respectivement d'un électron stationnaire et en mouvement, ainsi que sa masse au repos, deviennent

$$\bar{E} = \frac{\bar{E}_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \bar{E}_0 = \frac{4}{3}E_0, \quad m_0 = \frac{\bar{E}_0}{c^2} = \frac{4}{3} \frac{E_0}{c^2}. \quad (465)$$

La masse au repos m_0 est ici définie par

$$\mathbf{G} = \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Ces relations sont en accord avec le théorème de l'inertie de l'énergie, comme il est requis (on a fixé la constante additive dans $\bar{E}$ de manière à se conformer à ce théorème). *L'énergie totale de l'électron stationnaire est alors égale aux quatre tiers de son énergie électromagnétique telle que donnée par Lorentz.*

³⁷⁵M. Abraham, *Ann. Phys., Lpz.*, **10** (1903) 105. Voir aussi la note de bas de page 4, p. 1, H. A. Lorentz, *ibid.*, § 21.

³⁷⁶Cf. note de bas de page 10, p. 2, *Versl. gewone Vergad. Akad. loc. cit.*

³⁷⁷Cf. note de bas de page 12, p. 2, *ibid.*, § 10.

³⁷⁸M. Abraham, *Phys. Z.*, **5** (1904) 576 : *Theorie der Elektrizität*, Vol. 2, (1st edn., Leipzig

Il semblerait alors que l'électron rigide de la théorie « absolue » soit compatible avec une représentation purement électromagnétique du monde (ou plutôt, avec la représentation particulière du monde fondée sur le théorie de Maxwell-Lorentz), au contraire de l'électron tel que demandé par la théorie de la relativité. Mais cela n'est pas correct pour la raison suivante : l'hypothèse d'un électron rigide est un concept totalement étranger à l'électrodynamique. Sans elle, nous n'aurions pas eu seulement à postuler que la force *totale* (464) agissant sur l'électron devait s'annuler, mais plutôt que c'est la cas pour la force agissant sur chaque point individuel, p. 186

$$\rho \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}) \right\} = 0.$$

Il est clair qu'une charge stationnaire ($\mathbf{v} = 0$) est incompatible avec ce postulat, car il en résulterait $\rho = 0$ (notons que $\text{div } \mathbf{E} = \rho$). Ainsi, *l'électrodynamique de Maxwell-Lorentz apparait totalement incompatible avec l'existence de charges, sauf à la compléter par des éléments théoriques qui lui sont étrangers*. D'un point de vue purement électromagnétique l'électron de la théorie « absolue » n'est ainsi vraiment pas plus satisfaisant que celui de la relativité. En tout état de cause, il sera nécessaire d'introduire des forces qui équilibrent les forces répulsives de Coulomb de la charge de l'électron sur elle-même. De telles forces ne peuvent pas résulter de l'électrodynamique de Maxwell-Lorentz. Poincaré³⁷⁹ a déjà reconnu cette nécessité et a introduit de manière purement formelle une pression scalaire de cohésion, p , sur la nature de laquelle il n'a fait aucune affirmation. D'un point de vue général, le problème de l'électron doit être formulé de la manière suivante : le tenseur énergie-impulsion S_{ik} de l'électrodynamique de Maxwell-Lorentz doit être complété par des termes additionnels afin que les lois de conservation

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0 \quad (341)$$

pour le tenseur énergie-impulsion total deviennent compatible avec l'existence de charges. Ces termes additionnels vont certainement dépendre de quantités physiques déterminées de manière causale par des équations différentielles. (Dans le § 42, nous avons posé l'« Ansatz » phénoménologique $\mu_0 u_i u_k$ pour le tenseur énergie d'un électron isolé.) Nous discuterons dans les § 65 et 66 de l'ampleur des modifications à apporter à cette formulation en théorie *générale* de la relativité.

Nous sommes maintenant en mesure de répondre à un point litigieux soulevé par Ehrenfest³⁸⁰ : un mouvement de translation uniforme en l'absence de force est-il possible dans toute direction pour un électron qui, même au repos, ne serait pas de symétrie sphérique. Dans un tel cas, le moment électromagnétique de l'électron en mouvement ne serait pas toujours dans la direction de sa vitesse et les forces électromagnétiques exerceraient alors un couple sur l'électron. Laue³⁸¹ a remarqué que cette situation est parfaitement analogue à celle de l'expérience de Trouton et Noble. Dans cette expérience, le couple électromagnétique est compensé par un couple engendré par le courant d'énergie p. 187

1905), p. 205.

³⁷⁹Cf. note de bas de page 11, p. 2, *R.C. Circ. mat. Palermo., loc. cit.*

³⁸⁰P. Ehrenfest, *Ann. Phys., Lpz.*, **23** (1907) 204 : remarques à ce propos par A. Einstein, *Ann. Phys., Lpz.*, **23** (1907) 206.

³⁸¹Cf. note de bas de page 240, p. 129, *ibid.*

élastique. [5] Dans notre cas, l'effet de compensation est dû de manière analogue à un courant d'énergie représenté par les termes additionnels dans le tenseur énergie impulsion mentionnés précédemment. L'introduction de tels termes additionnels devient nécessaire non seulement dans le cas de l'électron en mouvement, mais également dans celui de l'électron stationnaire. Il doit donc être répondu par l'affirmative à la question d'Ehrenfest.

Nous devons encore discuter des *dimensions* de l'électron, tant du point de vue théorique envisagé ci-dessus que du point de vue expérimental. *Expérimentalement*, on sait avec un degré de probabilité élevé qu'en dernière analyse toute forme de matière consiste en noyaux d'hydrogène et en électrons. *Naturellement, toutes les affirmations précédentes à propos de l'électron valent également pour le noyau d'hydrogène.* L'expérience nous a seulement enseigné que les dimensions de ces particules sont certainement inférieures à 10^{-13} cm. En d'autres termes, pour ce qui concerne les forces qu'elles exercent l'une sur l'autre, deux telles particules se comporteront à distance pratiquement comme des charges ponctuelles. L'éventualité que les dimensions de ces particules soit bien plus petite que 10^{-13} cm n'est jusqu'à présent pas exclue par les expériences réalisées. *Théoriquement*, du point de vue de Lorentz, des affirmations définitives ne peuvent être faites que de la manière suivante : une sphère de rayon a chargée uniformément en surface a pour énergie

$$E = \frac{e^2}{8\pi a},$$

où e est la charge totale, mesurée en unités de Heaviside [Ici $\epsilon_0 = 1$. Commenter ?]. Il résulte de (465) que

$$m_0 = \frac{e^2}{6\pi a c^2}, \quad a = \frac{e^2}{6\pi m_0 c^2}. \quad (466)$$

Une modification de la distribution de charge ne changerait que le facteur numérique, mais pas l'ordre de grandeur de a . La valeur de a est obtenue à partir de celles, connues, des masses au repos de l'électron et du noyau d'hydrogène. Pour le premier, le rayon a est de l'ordre de 10^{-13} cm et pour le second environ 1800 fois plus petit, en rapport avec sa masse plus importante. Mais il faut remarquer que cette considération repose sur des fondements théoriques très fragiles. En effet, elle est fondée comme nous l'avons vu sur les hypothèses suivantes :

1. La distribution de charges d'un électron au repos (noyau d'hydrogène) est à symétrie sphérique.
2. Le moment total d'un électron en mouvement (noyau d'hydrogène) est donné par l'expression

$$\mathbf{G} = \frac{1}{c} \int \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} dV$$

de la théorie de Maxwell-Lorentz ; celle-ci est donc supposé également valable pour des concentrations les plus extrêmes de charges et de champs.

La seconde hypothèse en particulier apparaît douteuse. En aucune manière les données expérimentales disponibles à ce jour ne donnent une base empirique aux dimensions ainsi calculées, en particulier pour l'affirmation théorique que le rayon du noyau d'hydrogène doit être significativement plus petit que celui

[5] L'expérience de Trouton et Noble (1901-1903) est une tentative de mise en évidence du mouvement de la Terre par rapport à l'éther à partir du mouvement d'un condensateur supposé s'orienter de sorte que ses armatures se placent perpendiculairement à la direction du mouvement relatif.

de l'électron^{381a}[6].

[6] En effet, les ordres de grandeur issus de cette estimation « classique » ne sont pas conformes à la réalité pour ce qui concerne l'électron.

64. La théorie de Mie

La première tentative pour construire une théorie susceptible de tenir compte de l'existence de particules élémentaires chargées électriquement a été élaborée par Mie³⁸². Il s'est proposé de généraliser les équations de champ et le tenseur énergie-impulsion de la théorie de Maxwell-Lorentz de sorte que d'une part les forces répulsives de Coulomb à l'intérieur des particules élémentaires chargées soient maintenues en équilibre par d'autres forces, *également de nature électrique*, et d'autre part que les déviations à l'électrodynamique ordinaire restent indétectables dans les régions hors des particules.

Mie conserve le premier groupe d'équations de Maxwell

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0, \quad (203)$$

duquel découle l'existence d'un quadripotential,

$$F_{ik} = \frac{\partial \phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \phi_i}{\partial x^k} \quad (206)$$

(cf. § 28). De plus la quadridensité de courant devra satisfaire l'équation de continuité

$$\frac{\partial s^k}{\partial x^k} = 0. \quad (197)$$

Il s'ensuit l'existence d'un tenseur de type surface de rang 2, $H^{ik} = -H^{ki}$, satisfaisant l'équation

$$s^i = \frac{\partial H^{ik}}{\partial x^k}. \quad (467)$$

Ici, H^{ik} réunit les deux vecteurs $\mathbf{D}$ et $\mathbf{H}$, tout comme F_{ik} réunit les vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$. On voit ainsi que pour $H^{ik} = F^{ik}$, les équations se réduisent à celles de l'électrodynamique ordinaire et qu'elles sont formellement conformes à celles de l'électrodynamique phénoménologique des corps pondérables.

Maintenant cependant, les lois du champ acquièrent un nouveau contenu physique en vertu de l'hypothèse suivante, décisive : *Les vecteurs H^{ik} et s^k doivent être des fonctions universelles de F_{ik} et φ_i ,* [7]

$$H^{ik} = u_{ik}(\mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi}), \quad s^k = v_k(\mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi}). \quad (467a)$$

Les six premières relations diffèrent essentiellement de celles de l'électrodynamique phénoménologique en ce que H^{ik} dépend aussi explicitement de φ_i . Dans la théorie de Mie, ce n'est pas seulement la différence de potentiel, mais

[7] La version allemande présente une ambiguïté par l'absence de majuscules dans les arguments des fonctions, mais dans la version anglaise, que nous reprenons ici, les indices du second membre ne sont pas des indices tensoriels covariants mais des labels.
p. 189

^{381a} Sur ce point, on ne peut pas être en accord avec le point de vue présenté dans le livre de M. Born, *Die Relativitätstheorie Einsteins* (Berlin 1920), p.192. [Aller lire Born et commenter]

³⁸² G. Mie, 'Grundlagen einer Theorie der Materie', *Ann. Phys. Lpz.*, **37** (1912) 511 ; **39** (1912) ; **40** (1913) 1. Cf. aussi la version par M. Born, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, (1914) 23, qui met en évidence l'analogie entre la démonstration de la loi de l'énergie-impulsion à partir du principe variationnel de la théorie de Mie et la démonstration de la loi de conservation de l'énergie à partir du principe d'Hamilton en mécanique ordinaire. Voir aussi H. Weyl, *Raum-Zeit-Materie* (1ère édition, 1918) § 25, p. 165 ; (3ème édition, 1920) §25, p. 175.

le potentiel dans l'absolu qui acquiert une signification réelle. Les équations ne restent pas inchangées si l'on remplace $\boldsymbol{\varphi}$ par $\boldsymbol{\varphi} + \text{const.}$ Nous verrons plus tard que cette particularité de la théorie de Mie conduit à de sérieuses difficultés⁽¹⁾.

Les quatre dernières équations (467a) sont essentielles pour l'existence des particules matérielles (électron et noyau d'hydrogène) et les lois de leur mouvement. [8] Mie dénomme, plus ou moins arbitrairement, φ_i et F_{ik} “grandeurs d'intensité” et s^k et H^{ik} “grandeurs de quantité”. [Citer Mie 1912 p 3 fin du premier §.]

[8] Si la charge dépend de φ , changer le potentiel par une constante change la charge.

Au moyen de (467a), pas moins de dix fonctions universelles sont introduites dans la théorie. Cependant, comme Mie l'a trouvé, le principe de l'énergie apporte une grande simplification, qui permet de réduire les dix fonctions universelles inconnues à une seule. En effet on voit qu'une équation de la forme

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div } \mathbf{S} = 0$$

(W = densité d'énergie, $\mathbf{S}$ = courant d'énergie)

[9] (457) dans la version anglaise par erreur que ne comporte pas la version originale.

ne peut être déduite de (206) et (467)^[9], que lorsqu'il existe un invariant $L(\mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi})$ (principalement vis-à-vis du groupe de Lorentz^[10]) duquel H^{ik} et s^i puissent être obtenus par différentiation,

$$H^{ik} = \frac{\partial L}{\partial F_{ik}}, \quad s^i = -\frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial \varphi_i}, \quad (468)$$

[10] Il ne s'agit pas ici d'invariance par transformation de jauge, mais par transformation de Lorentz, d'où la précision du texte allemand avec le *zunächst*.

de sorte que (2)

$$\delta L = H^{ik} \delta F_{ik} - 2s^i \delta \varphi_i. \quad (468a)$$

Un calcul simple montre ensuite que l'équation (467) découle du principe d'action

$$\delta \int L d\Sigma = 0, \quad (469)$$

si la variation remplit les conditions (206) pour le champ objet de la variation.

On peut faire un certain nombre d'affirmations générales sur l'invariant L , qui est souvent appelé fonction d'univers. En premier lieu, les seuls invariants indépendants que l'on peut former à partir du tenseur de type surface F_{ik} et du vecteur φ_i sont les suivants :

- (1) Le carré du tenseur F_{ik} : $\frac{1}{2} F_{ik} F^{ik}$.
- (2) Le carré du vecteur φ_i : $\varphi_i \varphi^i$.
- (3) Le carré du vecteur $F_{ik} \varphi^k$: $F_{ir} \varphi_s F^{is} \varphi^r$.
- (4) Le carré du vecteur $F_{ik}^* \varphi^k$ ou, ce qui revient au même, le carré du tenseur de type volume $F_{ik} \varphi_l + F_{li} \varphi_k + F_{kl} \varphi_i$.

La fonction L doit s'exprimer à partir de ces quatre invariants.[†] Si L est égal au premier de ces invariants, les équations de la théorie de Mie dégénèrent en les équations ordinaires de la théorie de l'électron pour l'espace libre de charges. Ainsi, L ne peut être significativement différent de $\frac{1}{2} F_{ik} F^{ik}$ qu'à l'intérieur des particules matérielles. On ne peut rien dire de plus de la fonction d'univers L , on ne peut pas limiter les possibilités au point d'être en

[†] Voir note supplémentaire 20.

^[11]L'insistance est
ici due à Pauli.

mesure de définir une fonction d'univers sans ambiguïté. Au contraire il reste une variété infinie de possibilités.^[11]

On doit ensuite déterminer le tenseur énergie-impulsion T_{ik} comme fonction des champs. Hilbert³⁸³ et Weyl³⁸⁴ ont montré que les calculs correspondants peuvent être considérablement simplifiés en écrivant les équations du champ de Mie dans le formalisme de la théorie générale de la relativité et en utilisant ensuite la méthode de variation des g_{ik} qui a été introduite au § 55. Alors seulement, les connexions formelles deviennent clairement apparentes. Nous avons préparé le terrain pour cela dans notre choix de notations dans les formules précédentes et différons en cela de Mie qui a bien entendu basé ses articles de 1912 et 1913 sur la théorie de la relativité restreinte. Tout d'abord, tout comme dans le cas de l'électrodynamique ordinaire traité au § 54, l'ensemble d'équations (203), (208) reste valable aussi pour un champ G arbitraire. En revanche, (197) et (467) doivent être remplacées par

$$\frac{\partial \mathfrak{s}^i}{\partial x^i} = 0 \quad (197a)$$

$$\mathfrak{s}^i = \frac{\partial \mathfrak{H}^{ik}}{\partial x^k}. \quad (467b)$$

Comme cela a été remarqué par Weyl, les “grandeurs de quantité” apparaissent ici comme des *densités* tensorielles (i.e. multipliées par $\sqrt{-g}$), alors que les “grandeurs d'intensité” restent des tenseurs ordinaires. De même, les relations (468), (468a) et le principe d'Hamilton (469) restent valables et ce dernier peut bien entendu s'écrire également sous la forme

$$\delta \int \mathfrak{L} dx = 0. \quad (469a)$$

Pour obtenir le tenseur énergie T_{ik} , on doit simplement déterminer la variation de la fonction d'action obtenue en variant le champ G . Comme dans ce cas L est indépendant des dérivées des g_{ik} , la relation suivante est valable si le champ électromagnétique est maintenu constant,

$$\delta \mathfrak{L} = \mathfrak{T}_{ik} \delta g^{ik}$$

de sorte que

$$T_{ik} = \frac{\partial L}{\partial g^{ik}} - \frac{1}{2} L g_{ik}, \quad T_i{}^k = \frac{\partial L}{\partial g^{ir}} g^{rk} - \frac{1}{2} L \delta_i{}^k. \quad (470)$$

Si d'autre part on substitue dans l'expression générale

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial g^{ik}} \delta g^{ik} + H^{ik} \delta F_{ik} - 2s^i \delta \varphi_i$$

résultant de (468a), une variation des champs produite par une transformation p. 191 infinitésimale de coordonnées (comme celle donnée par (??), (??)), δL doit

³⁸³Cf. note de bas de page 99, p. 63, *ibid.*, I.

³⁸⁴H. Weyl, *Raum-Zeit-Materie* (1ère édition, 1918), p. 184 *et seq.*; (3ème édition, 1920), p. 199.

s'annuler identiquement. En d'autres termes,

$$2 \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \left(\frac{\partial L}{\partial g^{ir}} g^{rk} - H^{kr} F_{ir} + s^k \varphi_i \right) \equiv 0,$$

qui n'est possible que si la parenthèse s'annule identiquement. Finalement en substituant la valeur de $(\partial L / \partial g^{ir}) g^{rk}$ ^[12] dans (470) on obtient

$$T_i^k = H^{kr} F_{ir} - s^k \varphi_i - \frac{1}{2} L \delta_i^k. \quad (470a)$$

[Commenter les détails de calculs ici comme ds les notes manuscrites.] Il suit de ce calcul que les composantes covariantes correspondantes T_{ik} sont symétriques. Sur la base des résultats du § 55, la loi de l'énergie-impulsion est une conséquence des équations du champ. ⁽³⁾ En l'absence de champ gravitationnel cette loi prend la forme

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0, \quad (341)$$

alors qu'elle en présence de champ gravitationnel elle devient,

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \mathfrak{T}^{rs} \frac{\partial g^{rs}}{\partial x^i} = 0. \quad (341a)$$

L'expression (470a) pour le tenseur énergie-impulsion est identique à celle obtenue par Mie par un calcul direct.

Considérons maintenant une nouvelle fois le problème des lois du mouvement et celui de l'existence des particules matérielles. En électrodynamique ordinaire, l'intensité du champ électrique est définie comme la force agissant sur une charge (au repos). Dans la théorie de Mie cette conception simple de l'intensité du champ ne s'applique plus à l'intérieur d'une particule matérielle. En effet, la force pondéromotrice [force pondéromotrice à expliquer] est partout égale à zéro. Cependant la signification pratique de charge totale d'une particule subsiste. Pour cela considérons une particule chargée dans un champ extérieur. Dans ce cas, il découle de (341) que^[13]

$$\frac{d}{dx^4} \int T_i^4 dx^1 dx^2 dx^3 = - \int (T_i^k n_k) d\sigma. \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

(n_k = vecteur unitaire normal à la surface)

La seconde intégrale est prise sur une surface suffisamment éloignée de la particule matérielle. Comme l'électrodynamique ordinaire est valable sur cette surface, l'intégrale de surface y a la même valeur qu'ici, i.e. elle représente la force de Lorentz. Nous avons donc donné un fondement électrodynamique à l'équation de mouvement (??) d'un électron dans le contexte de la théorie de Mie. Dans le même temps, on voit qu'en accord avec le théorème de l'inertie de l'énergie, la masse au repos de la particule matérielle est déterminée par

$$m_0 = \frac{E_0}{c^2} = - \int T_4^4 dx^1 dx^2 dx^3. \quad (471)$$

p. 192 Pour T_4^4 , on doit remplacer l'expression obtenue à l'aide de (470).

Mie suppose que le champ d'un électron au repos est statique et à symétrie sphérique. Comme cela a été expliqué à la section précédente, cette dernière

^[12] Coquille d'indices dans l'édition allemande, corrigée dans l'édition anglaise mais qui introduit alors une erreur de position des indices.

^[13] Intégration sur le volume de la loi de conservation énergie-impulsion.

hypothèse n'est pas justifiée par les faits expérimentaux seuls, mais s'impose pour sa simplicité. Nous aurons donc à chercher les solutions des équations du champ qui sont régulières partout – pour $r = 0$ aussi bien que pour $r = \infty$. Une fonction d'univers qui corresponde à la réalité devra conduire à une unique solution pour chaque type d'électricité. ^[14] *Il n'a pas été possible jusqu'à présent de proposer une fonction d'univers qui satisfasse cette condition.* Au contraire, les fonctions d'essai pour L discutées jusqu'à présent conduisent à la conclusion, en contradiction avec l'expérience, que des particules élémentaires avec des valeurs arbitraires de la charge totale peuvent exister. Ceci en soi n'est pas une raison suffisante pour abandonner la théorie de Mie car il n'a pas été prouvé qu'il ne *pouvait pas* exister de fonction d'univers compatible avec l'existence de *certaines* particules élémentaires déterminées.

^[14] Il s'agit de l'électron et du noyau d'hydrogène, soit la même valeur de la charge au signe près.

Une difficulté bien plus sérieuse nous semble-t-il est due à un fait déjà remarqué par Mie. Une fois qu'on a trouvé une solution pour le potentiel électrostatique φ pour une particule matérielle d'un type requis, $\varphi + \text{const.}$ ne peut pas être une autre solution, parce que les lois du champ de Mie contiennent la valeur elle-même du potentiel. *Une particule matérielle ne peut donc pas exister dans un potentiel externe constant.* Ceci nous semble-t-il constitue un argument de poids à l'encontre de la théorie de Mie. Dans les théories que nous allons discuter dans les sections suivantes, on ne rencontrera pas ce type de difficulté.

Une tentative de Weyl doit être mentionnée ici, dans laquelle il essaie de rendre compréhensible l'asymétrie des deux formes d'électricité du point de vue de la théorie de Mie[†]. Si la fonction d'univers L n'est pas une fonction rationnelle de $\sqrt{-\varphi_i \varphi^i}$, on peut poser ^[15]

$$L = \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik} + w(+\sqrt{-\varphi_i \varphi^i}) \quad \text{pour } \varphi_i \varphi^i < 0, \varphi_4 > 0$$

et

$$L = \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik} + w(-\sqrt{-\varphi_i \varphi^i}) \quad \text{pour } \varphi_i \varphi^i < 0, \varphi_4 < 0$$

^[15] Une erreur de signe et l'absence de condition sur φ_4 dans la version allemande ont été corrigées lors de la traduction anglaise.

où w est une fonction non paire quelconque. **[Pouvons-nous commenter ici le côté rationnel ou non, fonction paire ou non ?]** Dans le cas statique, les équations du champ ne resteront pas invariantes dans l'échange de φ en $-\varphi$ (électricité positive et négative). En toute généralité, si L est une fonction multivaluée des quatre invariants fondamentaux indiqués plus haut, il est possible de choisir l'une de ses branches comme fonction d'univers pour l'électricité positive et une autre pour l'électricité négative. Nous reviendrons sur cette possibilité au § 67.

***** nous en sommes ici des annotations de marge 23/01/18.

65. La théorie de Weyl[‡]

Dans une série d'articles, Weyl³⁸⁵ a développé une théorie extrêmement profonde, fondée sur une généralisation de la géométrie de Riemann et qui affirme ramener tous les phénomènes physiques en termes de gravitation et

[†] Voir note supplémentaire 21.

[‡] Voir note supplémentaire 22.

³⁸⁵ H. Weyl, *S.B. preuss. Akad. Wiss.* (1918) 465; *Math. Z.* **2** (1918) 384; *Ann. Phys., Lpz.*, **59** (1919) 101; *Raum-Zeit-Materie*, (3rd edn., 1920), Chaps. II and IV, §§34 and 35, p. 242 et seq.; *Phys. Z.*, **21** (1920) 649.

d'électromagnétisme et cela en dernier ressort en termes de métrique d'Univers. p. 193
La structure de base de cette théorie et les résultats obtenus à ce jour seront discutés à cet *endroit* parce que la théorie a aussi certaines affirmations sur la nature des particules matérielles.

(α) *Géométrie infinitésimale pure. Invariance de jauge* ⁽⁴⁾ [Numérotation des subsections à rendre conforme à la version allemande]

Le passage de la géométrie euclidienne à la géométrie riemannienne a été vu dans la partie II comme réalisée en relaxant l'hypothèse que le transport de la direction d'un vecteur d'un point P à un point P' est indépendant du chemin suivi. Weyl franchit un pas de plus en autorisant une dépendance en fonction du chemin du transport de longueur. Il sera donc uniquement possible de comparer des longueurs mesurées *en un même point* de l'espace, mais pas en des points différents. En d'autres termes, on peut seulement déterminer des relations entre les g_{ik} grâce à des mesures, mais pas les quantités elles-mêmes. Supposons tout d'abord des valeurs arbitraires (continues) absolues pour les g_{ik} et définissons

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

comme le carré de la longueur d'une règle, où les dx^i sont les différences entre les coordonnées de ses points extrêmes. (Par souci de brièveté, nous parlons ici et dans ce qui suit en termes de règles, mais les mêmes arguments s'appliquent bien sûr à la période d'une horloge dans le cas d'un élément de longueur du genre temps). Si maintenant la règle est déplacée le long d'une courbe déterminée $x^i = x^i(t)$ d'un point P(t) à un point P'(t + dt), le carré de la longueur $ds^2 = l$ sera alors changé. Nous allons admettre comme axiome qu'il sera toujours changé d'une fraction définie de l ,

$$\frac{dl}{dt} = -l \frac{d\varphi}{dt} \quad (472)$$

où φ est une certaine fonction de t et est indépendante de l . On introduit comme second axiome que $d\varphi/dt$ dépend uniquement des dérivées premières des coordonnées, dx^i/dt . Comme de plus l'équation (472) doit être valable pour un choix arbitraire du paramètre t , $d\varphi/dt$ doit être une fonction homogène du premier degré des dx^i/dt . Cette fonction peut être spécifiée davantage au moyen du concept de transport parallèle qui a été discuté au § 14. Ce concept y a été défini par deux conditions : la première affirmait que les composantes d'un vecteur resteraient inchangées pour un transport parallèle *infinitésimal dans un référentiel convenablement choisi*, là où la seconde exprimait le fait que la longueur d'un vecteur resterait inaltérée durant le transport parallèle. La première hypothèse peut être retenue inchangée ; elle conduit à l'expression (64) pour le changement des composantes du vecteur,

$$\frac{d\xi^i}{dt} = -\Gamma^i_{rs} \frac{dx^s}{dt} \xi^r \quad (64)$$

avec

$$\Gamma^i_{rs} = \Gamma^i_{sr}. \quad (65)$$

p. 194 La seconde hypothèse en revanche perd son sens ici, parce que les longueurs de deux vecteurs en des points différents ne peuvent plus être comparées. A sa

place, cette hypothèse doit être remplacée par la condition que les longueurs doivent changer selon (472),

$$\frac{d}{dt}(g_{ik}\xi^i\xi^k) = \frac{d}{dt}(\xi_i\xi^i) = -g_{ik}\xi^i\xi^k \frac{d\varphi}{dt}, \quad (473)$$

pour un déplacement parallèle. En substituant (64), il s'ensuit tout d'abord que $d\varphi/dt$ doit être une forme linéaire de dx^i/dt ,

$$d\varphi = \varphi_i dx^i. \quad (474)$$

Le déplacement parallèle est possible uniquement à cette condition. De plus, de

$$\Gamma_{irs} = g_{ik}\Gamma_{rs}^k, \quad \Gamma_{rs}^i = g^{ik}\Gamma_{krs}, \quad (66)$$

on déduit que

$$\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^s} + g_{ir}\varphi_s = \Gamma_{irs} + \Gamma_{ris} \quad (475)$$

Les composantes géodésiques de la géométrie de Weyl sont donc différentes de celles de Riemann. Nous noterons toujours à l'aide d'une astérisque les expressions de la géométrie riemannienne. Elles proviennent à celles de la géométrie de Weyl lorsque $\varphi_i = 0$ ^[16] Ainsi, si les quantités (??) sont notées Γ_{irs}^* , alors

$$\Gamma_{irs} = \Gamma_{irs}^* + \frac{1}{2}(g_{ir}\varphi_s + g_{is}\varphi_r - g_{rs}\varphi_i). \quad (476)$$

On a fixé les valeurs absolues de g_{ik} complètement arbitrairement. A la place du jeu de valeurs g_{ik} , on aurait tout aussi bien pu utiliser l'ensemble de valeurs λg_{ik} , où λ est une fonction arbitraire de la position. Tous les éléments de longueur auraient dans ce cas dû être multipliés par λ et à cause de (472), nous aurions trouvé l'ensemble de valeurs

$$\varphi_i - \frac{\partial \ln \lambda}{\partial x^i} = \varphi_i - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x^i},$$

à la place de φ_i . Fixer le facteur λ , la jauge, dans la géométrie de Weyl va de pair avec le choix des coordonnées dans la géométrie de Riemann. *Tout comme nous avons supposé l'invariance de toutes les relations géométriques et des lois physiques dans un changement arbitraire des coordonnées, nous avons maintenant à postuler en plus leur invariance vis-à-vis des substitutions*

$$\bar{g}_{ik} = \lambda g_{ik}, \quad \bar{\varphi}_i = \varphi_i - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x^i}, \quad (477)$$

c.-à-d. par rapport aux changements de la jauge (invariance de jauge).

(β) *Champ électromagnétique et métrique d'Univers.* De (472), il s'ensuit par intégration que [Uniformiser le choix ln ou log et indiquer]

$$\ln l|_P^{P'} = - \int_P^{P'} \varphi_i dx^i,$$

^[16] La formulation anglaise avec « reduce » st ici plus réductrice que « hervorgehen » en allemand.

$$l_{P'} = l_P \exp \left\{ - \int_P^{P'} \varphi_i dx^i \right\}. \quad (478)$$

Quand la forme linéaire $\varphi_i dx^i$ est une différentielle totale, la longueur d'un vecteur devient indépendante de la trajectoire le long de laquelle il est transporté et on revient au cas riemannien. La condition nécessaire et suffisante pour cela est l'annulation des expressions

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k}. \quad (479)$$

^[17] Antisymétrique

En fait, dans ce cas, à l'aide de (477) nous voyons que dans ce cas le vecteur φ_i peut toujours être rendu nul par un choix convenable de la jauge. Dans le cas général cependant, les quantités F_{ik} seront différentes de zéro. Elles forment donc les composantes covariantes d'un tenseur de type surface ^[17] de rang 2, qui de plus reste inchangé dans un changement de jauge, en raison de (477). De plus elles satisfont aux équations

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0, \quad (480)$$

qui découlent de (479). Nous voyons que les équations (479) et (480) ont exactement la même forme que les équations (206) et (203) de la théorie de l'électron. Mais l'analogie peut être menée plus avant. Si l'on prend le point de vue (contrairement aux hypothèses de la théorie de Mie) que les phénomènes électromagnétiques sont déterminés de manière première par les changements dans l'espace et le temps des intensités des champs seuls, et que les potentiels sont en revanche vus comme des quantités mathématiques auxiliaires, alors les valeurs des potentiels φ_i qui conduisent aux mêmes intensités du champ sont physiquement complètement équivalentes ; de sorte qu'un gradient $\partial\psi/\partial x^i$ reste indéterminé dans les φ_i . Mais, ainsi qu'on la vu, le même raisonnement s'applique exactement au vecteur métrique φ_i . Suivant Weyl, nous sommes ainsi conduits à identifier les deux jeux de quantités φ_i, F_{ik} : *le vecteur métrique φ_i qui détermine le comportement des longueurs selon (478), doit être identique au quadri-potential électromagnétique (à un facteur numérique près)*. Tout comme les effets gravitationnels dans la théorie d'Einstein sont intimement liés au comportement des règles et horloges de mesure, de sorte qu'elles s'en déduisent sans ambiguïté, la même chose vaut pour les effets électromagnétiques dans la théorie de Weyl. Dans ce sens, la gravitation et l'électricité apparaissent toutes deux comme des conséquences de la métrique d'Univers dans cette théorie.

^[18] Un champ de gravitation
p. 196

Ce point de vue devait être ensuite modifié par Weyl. Les hypothèses de base de la théorie dans sa forme originale conduisent en effet, comme Einstein l'a signalé³⁸⁶, à des déductions qui semblent en contradiction avec l'expérience. Pensons à un champ électrostatique connecté à un G—champ statique ^[18]. Les composantes spatiales φ_i ($i = 1, 2, 3$) s'annulent et la composante temporelle $\varphi_4 = \varphi$ de même que les g_{ik} est indépendante du temps. La jauge est alors fixée à facteur *constant* près. Si l'on applique la relation (478) à la période d'une horloge stationnaire, il s'ensuit directement que

$$\tau = \tau_0 e^{\alpha \varphi t}, \quad (481)$$

où α est un facteur de proportionnalité. La signification de cette équation est la suivante : considérons deux horloges identiques, C_1 et C_2 , battant le même

³⁸⁶ A. Einstein, *S.B. preuss. Akad. Wiss.* (1918) 478, contient la réponse de Weyl.

rythme, placées tout d'abord au point P_1 dans un potentiel électrostatique φ_1 . Menons ensuite l'horloge C_2 en un point P_2 dans un potentiel φ_2 pendant t secondes pour la ramener ensuite en P_1 . Il en résultera que le rythme de l'horloge C_2 , comparé à celui de l'horloge C_1 , sera augmenté ou diminué d'un facteur $\exp[-\alpha(\varphi_2 - \varphi_1)t]$ (selon le signe de α et de la différence $\varphi_2 - \varphi_1$). Cet effet devrait en particulier être notable dans les lignes spectrales d'une substance donnée, les raies spectrales de fréquences définies ne pouvant pas exister, car, si petit que soit choisi α , les différences augmenteraient indéfiniment au cours du temps selon (481) [Estimer ici la valeur de α pour que la variation des fréquences spectrales soit inobservable à l'échelle de l'âge de l'univers pour des valeurs typiques du potentiel (si cela a du sens)]. Le point de vue actuel de Weyl à cet égard est le suivant : *le processus idéal de transport congruent des intervalles d'univers tels que déterminés par (472) n'a rien à voir avec le comportement réel des règles et des horloges ; la métrique du champ ne doit pas être définie à partir des informations obtenues directement par ces instruments de mesure.* [Commenter cette attitude de Weyl, cf Chr. Eckes] Dans ce cas, les quantités g_{ik} et φ_i ne sont par définition plus observables directement, au contraire de l'élément de longueur ds^2 de la théorie d'Einstein. Ce renoncement semble avoir des conséquences très sérieuses. Alors qu'il n'y a plus maintenant de contradiction directe avec l'expérience, la théorie apparaît cependant avoir perdu, d'un point de vue physique, de son pouvoir de conviction profond.³⁸⁷ Par exemple le lien entre l'électromagnétisme et la métrique d'univers n'est plus proprement physique, mais purement formel. En effet il n'y a plus de connexion immédiate entre les phénomènes électromagnétiques et le comportement des règles et des horloges, il y a seulement une connexion entre les premiers et le processus idéal défini mathématiquement comme le transport parallèle de vecteurs. De plus, il existe un fondement seulement formel et non pas physique du lien entre métrique d'univers et électricité, tout au contraire de la connexion entre métrique d'univers et gravitation, pour laquelle une confirmation empirique forte est fournie par l'égalité entre masses gravitationnelle et inertielle et qui est une conséquence rigoureuse du principe d'équivalence et de la relativité restreinte.

(γ) *Le calcul tensoriel dans la géométrie de Weyl.* Avant d'écrire les lois du champ, nous devons exposer les règles formelles qui permettent d'obtenir des équations invariantes de jauge. Il est clair que dans la théorie de Weyl, le concept de tenseur doit être modifié de manière telle qu'un système d'équations qui exprime l'annulation de toutes les composantes d'un tenseur doit non seulement rester invariant dans un changement arbitraire des coordonnées, mais aussi pour un changement de jauge (477) arbitraire. De fait, il apparaît commode de ne désigner comme tenseurs que les quantités qui sont simplement multipliées par une puissance λ^e de λ dans la transformation (477) ; e étant p. 197 appelé le poids du tenseur. Ainsi, g_{ik} est de poids +1, g^{ik} de poids -1, $\sqrt{-g}$ dans un univers quadri-dimensionnel est de poids 2, Γ^r_{ik} est, d'après (64) ou (476), absolument invariant de jauge, i.e. de poids 0.

Toutes les opérations qui sont basées seulement sur le concept de transport parallèle peuvent être naturellement transposées à la géométrie de Weyl ; la seule chose pour cela à faire est d'utiliser les expressions (66), (467) à la place de (66), (??) pour Γ^r_{ik} . Ainsi les lignes géodésiques peuvent être définies ici aussi

³⁸⁷ A. Einstein considère que même dans cette version, la théorie ne supportera pas la confrontation à la réalité (*Phys. Z.*, **21** (1920) 651 ; Cf. note de bas de page 18, p. 4, *ibid.*).

par la condition que leur tangente reste parallèle à elle-même ; elles satisfont à nouveau les équations (??). Les équations (??) ($u_i u^i = \text{const.}$) cependant doivent être remplacées par

$$\frac{d}{d\tau}(u_i u^i) = -(u_i u^i)(\varphi_k u^k)$$

en raison de (472) et (474). Si en particulier $u_i u^i = 0$ en un point d'une ligne géodésique, cette relation restera toujours valable. Cela rend possible la détermination des lignes géodésiques nulles ^[19]. La propriété des lignes géodésiques d'être aussi les lignes les plus courtes est abandonné dans la géométrie de Weyl parce que le concept de longueur d'une courbe n'y a plus de sens. Comme dans le § 16, nous obtenons le tenseur de courbure en termes de déplacement parallèle d'un vecteur le long d'une courbe fermée,

$$R^h_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^h_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^h_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^h_{k\alpha} \Gamma^\alpha_{ij} - \Gamma^h_{j\alpha} \Gamma^\alpha_{ik}. \quad (86)$$

Les composantes dans cette équation sont de poids 0, et les composantes de R_{hijk} sont alors de poids 1. Les relations de symétrie de ce tenseur de courbure sont cependant différentes de celles du tenseur de Riemann qui sont déterminées par (??). Weyl a discuté cela en détail et a aussi calculé explicitement l'expression (86) pour le tenseur de courbure par substitution de (476). Comme au § 17, nous obtenons le tenseur de courbure contracté R_{ik} , (??), dont les composantes covariantes sont de poids 0, et l'invariant R , (??), de poids -1 . Finalement, toutes les opérations des § s 19 et 20 restent valables dans la théorie de Weyl, pourvu premièrement que les dérivées des composantes des tenseurs et densités tensorielles soient de poids 0 et deuxièmement que les expressions (66) et (476) soient utilisées pour les quantités Γ^r_{ik} . On remarquera qu'il est parfaitement suffisant pour établir les preuves de la plupart des théorèmes de remarquer que le concept de transport parallèle selon (64) est déterminé de manière invariante à l'aide des Γ^r_{ik} sans avoir à connaître la relation des ces derniers aux quantités métriques g_{ik} , φ_i . Dans les dernières versions de sa théorie, Weyl a fortement insisté sur ce point en développant sa géométrie en trois étapes. Dans la première, il a démontré les théorèmes qui sont valables pour des variétés arbitraires ; dans la seconde, les relations basées sur le concept de transport parallèle (appelé « connexion affine » par Weyl ^[20]) ; et finalement les conséquences résultant de l'existence des deux formes métriques fondamentales : la quadratique $g_{ik} dx^i dx^k$ (gravitation) et la linéaire $\varphi_i dx^i$ (électricité). Le lien entre ces deux types phénomènes, qui étaient séparés dans les théories antérieures, trouve une expression formelle dans le fait les g_{ik} et φ_i apparaissent simultanément dans les composantes de la connexion Γ^r_{ik} et par conséquent dans la plupart des autres équations invariantes de jauge.

Les modifications ou extensions, dans la théorie de Weyl, des affirmations sur les transformations infinitésimales de coordonnées et intégrales invariantes que nous avons faites au § 23 sont particulièrement importantes pour les applications physiques. Tout d'abord les changements de jauge infinitésimaux apparaissent sur le même plan que les transformations infinitésimales de coordonnées. De (477) nous déduisons, à l'aide de $\lambda = 1 + \epsilon\pi(x)$,

$$\delta g_{ik} = \epsilon\pi g_{ik}, \quad (\delta g^{ik} = -\epsilon\pi g^{ik}), \quad \delta\varphi_i = -\epsilon\frac{\partial\pi}{\partial x^i}. \quad (482)$$

^[19]i.e. de genre lumière.

^[20]Serait appelé de nos jours connexion linéaire. Cartan utilisera connexion affine dans un autre sens plus tard. Point technique et historique à développer par Ph. N. et A. G.. p. 198

De plus, il est évident dans la théorie de Weyl que seules les densités scalaires $\mathfrak{W}$ de poids 0 conduisent à des intégrales invariantes $\int \mathfrak{W} dx$. Les scalaires correspondants sont alors de poids -2 , en raison du facteur $\sqrt{-g}$ dans un univers quadridimensionnel. Les scalaires de ce type vont jouer un rôle important dans ce qui suit. Parmi ceux-ci, il y a quatre combinaisons rationnelles des composantes du tenseur de courbure³⁸⁸,

$$\frac{1}{2}F_{ik}F^{ik}, \quad R_{hijk}R^{hijk}, \quad R_{ik}R^{ik}, \quad R^2. \quad (483)$$

L'invariant R apparaissant dans le principe d'action de la théorie d'Einstein est toutefois de poids -1 . Weyl a fait remarquer, du fait que les densités scalaires (483) sont de poids 0, qu'un univers quadridimensionnel a un avantage qui le distingue d'une variété métrique de dimension différente^[21]. En fait, sur ces dernières on ne pourrait construire aucune densité scalaire de poids 0 ayant une structure simple.

(δ) *Lois du champ et principe d'action. Conséquences physiques.* Nous devons maintenant chercher des lois physiques invariantes de jauge. Selon Weyl, tous les processus physiques sont réductibles à des effets électromagnétiques et gravitationnels. Nous avons ainsi à disposition les quatorze quantités d'état indépendantes φ_i et g_{ik} . Mais comme l'invariance de jauge a maintenant été ajoutée à l'invariance par changement de coordonnées, la solution générale des équations de champ doit contenir cinq fonctions arbitraires au lieu de quatre ; il doit aussi y avoir cinq identités entre les quatorze équations de champ. Nous verrons que quatre de ces identités expriment la loi de l'énergie-impulsion, de manière analogue à celle de la théorie d'Einstein, et que la cinquième identité exprime la loi de conservation de la charge.

Nous allons tout d'abord tenter de conserver les équations de Maxwell et d'identifier le tenseur énergie de matière avec celui de Maxwell et nous remplacerons seulement le tenseur de courbure de la géométrie riemannienne dans les équations d'Einstein par celui de la théorie de Weyl. Il s'avèrera que seule la première « prescription » est possible. Etudions pour commencer la théorie de Maxwell. Le premier groupe d'équations de Maxwell est satisfait par construction, comme cela a déjà été souligné. Mais comme l'intensité du champ F_{ik} est de poids 0, la même propriété sera vraie, dans un univers quadridimensionnel, des composantes contravariantes $\mathfrak{F}^{ik}$ de la densité tensorielle correspondante. Les équations

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{ik}}{\partial x^k} = \mathfrak{s}^i$$

sont alors invariantes de jauge : les équations de Maxwell restent inchangées lorsque g_{ik} est remplacée par λg_{ik} . Le théorème de Bateman selon lequel les équations de Maxwell sont invariantes par transformations conformes (§ 28) est contenu dans cette affirmation comme un cas particulier. De telles transformations changent en effet les valeurs normales δ_i^k , que prennent les g_{ik} en relativité restreinte, en $\lambda \delta_i^k$.^[22] L'invariance de jauge des équations de Maxwell est liée au fait que l'intégrale d'action

$$J = \int \frac{1}{4} F_{ik} \mathfrak{F}^{ik} dx$$

³⁸⁸R. Weitzenböck a montré dans *Wiener Ber., math. nat. Kl.*, IIa, **129** (1920) 683 et 687 que les invariants donnés ici sont les seuls de ce type.

^[21]On peut remarquer l'intérêt de cette remarque de Weyl. $\sqrt{-g}$ est de poids $n/2$ en dimension n , de sorte qu'en dimension 4, une quantité de type $R^2 \sqrt{-g}$ est bien de poids 0, mais uniquement en dimension 4.

p. 199

^[22]Ce δ_i^k est probablement un « pseudo-Kronecker » noté de nos jours η_{ik} pour une variété de Minkowski.

d'où elles découlent, est elle-même invariante de jauge. – Nous souhaitons noter de nouveau que la raison de l'annulation apparemment accidentelle du scalaire du tenseur énergie de Maxwell (§ 30, équation (??)) trouve aussi son origine dans l'invariance de jauge de cette intégrale d'action. D'après le § 55 la variation de l'intégrale d'action, en maintenant les F_{ik} constants, conduit à

$$\delta J = \int \mathfrak{S}_{ik} \delta g^{ik} dx.$$

Si l'on demande maintenant que J reste inchangée dans un changement de jauge infinitésimal, $\lambda = 1 + \epsilon\pi(x)$, on déduit directement de (482) que $\mathfrak{S}_i{}^i = 0$, comme attendu.³⁸⁹

^[23] Pauli parle ici de la théorie de Weyl qui « se comporte bien » vis-à-vis de la théorie de Maxwell mais dont le traitement est ensuite très différent de celui d'Einstein. Jusqu'à présent l'auteur présentait les avantages de la théorie de Weyl, maintenant, Pauli va en montrer les défauts.

Lorsqu'on vient à traiter de la théorie d'Einstein, la situation s'avère très différente de ce qu'il en était de celle de Maxwell. ^[23] Pour commencer, la loi selon laquelle les lignes d'Univers des masses ponctuelles et des rayons lumineux sont des géodésiques n'est plus valable en général dans la théorie de Weyl. Une masse ponctuelle ne se déplace le long d'une ligne d'Univers géodésique qu'en l'absence de champs électromagnétiques et pour les rayons lumineux, l'équation des lignes géodésiques perd son sens puisque même en l'absence de champ gravitationnel, les termes qui contiennent le quadrivecteur potentiel φ_i introduiront dans l'équation de la ligne géodésique des termes oscillants à la fréquence de la lumière. L'équation invariante de jauge

$$g_{ik} dx^i dx^k = 0$$

du cône de lumière [null cone] reste seule valable pour les lignes d'Univers des rayons lumineux. Les tentatives d'utilisation des équations du champ de la théorie d'Einstein dans la théorie de Weyl (en remplaçant les quantités de courbure de Riemann par celles plus générales de Weyl) échouent finalement puisque dans les équations

$$G_{ik} = -\kappa T_{ik}$$

[Commentaire de signe en relation avec la signature à faire par Raph dans la partie IV. Détailler aussi quelle sont les équations de champ de Weyl.] le membre de gauche serait de poids 0 et celui de droite de poids -1 ; ce qui se voit facilement à partir du tenseur énergie de Maxwell. [Vérifier ces poids et faire une note]. Cet échec est dû au fait que l'intégrale d'action $\int \mathfrak{R} dx$ dont résultent les équations d'Einstein n'est pas invariante de jauge, car elle est de poids 1 au lieu de 0. Si en revanche on souhaite retenir le principe d'invariance de jauge, on doit abandonner les équations de champ d'Einstein. Cette dernière remarque

³⁸⁹ Comme les φ_i interviennent dans J sous la forme de l'invariant de jauge F_{ik} , on n'a pas besoin de les varier. En lien avec cette observation, la théorie de Nordström de la gravitation fournit une application intéressante. Comme indiqué au § 56, l'élément de longueur de cette théorie admet la forme

$$ds^2 = \Phi \sum_i (dx^i)^2.$$

Il découle tout d'abord de l'invariance de jauge des équations de Maxwell que ces dernières restent également valables en présence de champs gravitationnels dans la théorie de Nordström, de sorte que les champs gravitationnels sont sans influence sur les processus électromagnétiques (e.g. absence de déviation des rayons lumineux). Au contraire, en raison de l'annulation du scalaire énergie de Maxwell l'énergie électromagnétique n'engendre pas de champ gravitationnel dans la théorie de Nordström, puisque les équations du champ gravitationnel ne comportent que le scalaire énergie. On voit avec ce qui précède que cette remarque aussi a comme fondement formel l'invariance de jauge des équations de Maxwell.

cependant nous indique d'ores et déjà la voie pour obtenir des équations de champ invariantes de jauge. On doit établir un principe d'action

$$\delta \int \mathfrak{W} dx = 0, \quad (484)$$

pour lequel l'intégrale est invariante aussi par les transformations de jauge. Pour des variations arbitraires des φ_i et g_{ik} s'annulant aux bords,

$$\delta \int \mathfrak{W} dx = \int (\mathfrak{w}^i \delta \varphi_i + \mathfrak{W}^{ik} \delta g_{ik}) dx, \quad (485)$$

de sorte que les lois physiques s'expriment par

$$\mathfrak{w}_i = 0, \quad \mathfrak{W}^{ik} = 0. \quad (486)$$

En étudiant les conditions pour que l'intégrale $\int \mathfrak{W} dx$ soit invariante par rapport aux transformations infinitésimales de coordonnées et aux changements de jauge infinitésimaux, on obtient cinq identités entre ces quatorze équations, comme cela a été postulé précédemment pour des raisons de causalité. Elles s'écrivent

$$\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x^i} + \mathfrak{W}_i{}^i \equiv 0 \quad (487)$$

et

$$\frac{\partial \mathfrak{W}_i{}^k}{\partial x^k} - \Gamma^r{}_{si} \mathfrak{W}_r{}^s + \frac{1}{2} F_{ik} \mathfrak{w}^k \equiv 0. \quad (488)$$

On peut ensuite s'intéresser aux variations de l'intégrale d'action qui ne s'annulent pas aux bords. Cela nous permettra de construire sans ambiguïté à partir de l'invariance d'action une densité vectorielle $\mathfrak{s}^i$ et la densité d'un tenseur affine $\mathfrak{S}_i{}^k$ qui obéissent aux identités

$$\frac{\partial \mathfrak{s}^i}{\partial x^i} \equiv \frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x^i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathfrak{S}_i{}^k}{\partial x^k} \equiv \frac{\partial \mathfrak{W}_i{}^k}{\partial x^k} \quad (489)$$

sans devoir s'annuler elles-mêmes en vertu de lois physiques. En conséquence, Weyl appelle $\mathfrak{s}^i$ le quadricourant et $\mathfrak{S}_i{}^k$ les composantes de l'énergie. On voit ainsi que *dans la théorie de Weyl la loi de conservation de la charge électrique est formellement exactement sur le même plan que celle de l'énergie. Toutes deux sont déduites de deux manières* [Raph essaie de comprendre ce que sont ces deux manières, j'y comprends rien. En particulier le lien avec la causalité avant 487.] *des lois de la nature, fournissant ainsi les cinq identités nécessaires entre elles.* [Commenter ici la méthode employée par Weyl différente de celle de Noether.] Les composantes de l'énergie, qui ne forment qu'un tenseur affine même dans la théorie d'Einstein (c'est-à-dire qui ne sont covariantes que par des transformations linéaires) ne peuvent plus être séparées en une partie due à la gravitation et l'autre due à la matière elle-même de sorte qu'un tenseur énergie-impulsion $T_i{}^k$ de la matière seule n'existe plus du tout dans cette théorie. On doit admettre que le principe d'action nous permet de reconnaître ces relations de manière particulièrement simple et transparente. On doit cependant ajouter qu'il n'est pas du tout évident d'un point de vue physique que les lois de la nature puissent se déduire d'un principe d'action. Il semblerait en

revanche bien plus naturel de déduire les lois physiques d'exigences purement physiques, comme cela a été fait dans la théorie d'Einstein au § 56. ^[24]

Pour être capable de faire d'autres déductions de la théorie, on doit maintenant faire des hypothèses spécifiques sur la forme de la fonction d'action. Le nombre de possibilités n'est pas aussi grand que dans la théorie de Mie. Dans cette dernière un nouvel invariant pouvait être déduit d'une fonction *arbitraire* $f(J_1, J_2, \dots)$ des invariants arbitraires $J_1, J_2, \dots$. Ce n'est plus le cas ici car les invariants doivent être de poids -2 pour que les densités scalaires résultantes soient de poids 0 . Une nouvelle fonction d'action admissible ne peut donc être produite que par une fonction qui est au plus *homogène du premier degré* en ces invariants. Même ainsi, le nombre de fonctions d'action recevables reste assez considérable. L'hypothèse la plus naturelle est que la fonction d'action invariante soit une fonction rationnelle des composantes de la courbure. Comme on l'a vu en (γ) , la fonction d'action devra alors être construite linéairement à partir des invariants (483)³⁹⁰ Le calcul conduit en premier lieu à la *validité des équations de Maxwell*

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{ik}}{\partial x^k} = \mathfrak{s}^i \quad (208a)$$

et aussi aux expressions

$$s_i = k \left(\frac{\partial R}{\partial x^i} + R \varphi_i \right) \quad (490)$$

pour le quadricourant (R est l'invariant de courbure dans la géométrie de Weyl et k une constante). Dans le cas statique on en déduit que

$$R = \text{const.} \quad (491)$$

^[24] Les tentatives actuelles de construction de nouvelles théories physiques en physique des hautes énergies, en cosmologie ou même en physique de la matière condensée sont généralement fondées sur un principe d'action, en raison notamment du fait que l'action est une quantité scalaire que l'on peut contraindre au moyen des principes de symétrie que l'on cherche à imposer à la théorie. Peut-on trouver la position de Pauli sur les principes variationnels, son idée de l'action EH, etc ?

³⁹⁰ H. Weyl pense qu'il est probable que l'hypothèse $W = \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik} + c R_{hijk} R^{hijk}$ corresponde à la réalité (Cf. note de bas de page 385 p.???, *Ann. Phys. Lpz., loc. cit.*, and *Raum-Zeit-Materie, loc. cit.*).

En présence de charges, cette constante ne peut pas s'annuler. Si de plus elle est supposée positive, *il s'ensuit automatiquement que la courbure de l'espace est positive et que l'univers est fini*, de sorte qu'il n'est pas nécessaire d'ajouter un « terme λ » spécial aux équations de gravitation. ^[25] C'est un mérite particulier de la théorie de Weyl. ^[26] Quant aux équations de la gravitation, elles ne sont pas identiques à celles d'Einstein, même en l'absence de champ électromagnétique ($\varphi_i = 0$) comme on pouvait s'y attendre sur la base des arguments précédents, puisqu'elles sont de ordre supérieur à deux. Mais on peut montrer que dans le cas d'un champ statique à symétrie sphérique dans l'espace hors d'une « masse ponctuelle » — le seul cas important en pratique, décisif pour ce qui concerne la précession du périhélie de Mercure et la déviation des rayons lumineux — le champ gravitationnel (??) de la théorie d'Einstein est aussi solution des équations gravitationnelles de la théorie de Weyl. ^[27] *La théorie de Weyl est ainsi capable d'expliquer la précession du périhélie de Mercure et la déviation des rayons lumineux tout aussi bien que la théorie d'Einstein.* ³⁹¹

Nous avons encore à discuter les conclusions concernant le problème de la structure de la matière. Une fois encore, le problème consiste à déterminer les solutions statiques et à symétrie sphérique des équations de champ qui ne sont nulle part singulières. On doit encore demander à toute fonction d'action qui corresponde à la réalité qu'elle admette seulement une solution pour chaque type d'électricité. Un aspect essentiellement nouveau comparé à la théorie de Mie apparaît dans les conditions de régularité, non pas à l'infini, mais à l'« équateur » de l'univers en raison du son caractère fini. On est alors amené à conjecturer qu'une connexion existe entre la taille de l'univers et celle de l'électron [Cela rejoint l'hypothèse des grands nombres de Dirac, Eddington], ce qui serait quelque peu fantastique. Les forces qui maintiennent l'électron dans cette théorie sont en partie d'origine électrique et en partie des forces gravitationnelles. Même avec les hypothèses spéciales discutées en détail précédemment pour la fonction d'action, les équations différentielles deviennent si compliquées qu'il n'a pas été jusqu'à présent possible de les intégrer. En dehors de cela, les équations différentielles sont les mêmes pour l'électricité positive et négative (cf. § 67), de sorte que les relations complètement asymétriques qu'on obtient en réalité ne sont certainement pas représentées correctement. [†] *En résumé on peut dire que jusqu'à présent la théorie de Weyl n'a pas permis d'avancer vers une solution au problème de la matière.* Au contraire, on argumentera plus en détail au § 67 dans le sens qu'aucune solution à ce problème ne puisse être trouvée en suivant cette voie.

66. La théorie d'Einstein

Einstein a tenté d'approcher la question de la structure des particules matérielles sous un angle complètement différent ³⁹². Les équations du champ (??) et (??) sont respectivement basées sur l'hypothèse que le tenseur énergie-

³⁹¹ En dehors des articles de Weyl, indiqués dans la note de bas de page 385, p.???, voir aussi W. Pauli, jr., *Verh. dtsch. phys. Ges.*, **21** (1919) 742, où le principe d'action mentionné dans la note de bas de page 390, p.??? est spécifiquement utilisé comme base.

[†] Voir note supplémentaire 21.

³⁹² A. Einstein, *S.B. preuss. Akad. Wiss.* (1919) 349; également dans la collection Lorentz-Einstein-Minkowski, *Das Relativitätsprinzip*, (5ème éd., Berlin 1920)

^[25] Le rôle de la constante cosmologique a beaucoup évolué au cours du XXème siècle, les cosmologistes y étant attachés, par exemple Eddington « *We have no reason to think that λ is not so small as to be entirely beyond observation... I would as soon think of reverting to Newtonian theory as of dropping the cosmical constant.* » (A. Eddington, *Eddington, Arthur The expanding universe*, Cambridge : Cambridge University Press (1933).). Pauli adopte plutôt la position plus communément admise par les physiciens, « *Einstein... completely rejected the cosmological term as superfluous and no longer justified. I fully accept this new standpoint of Einstein's.* » cet ouvrage, p. 220.

^[26] Cf. par exemple P.D. Mannheim arxiv :astro-ph/0505266. p. 202

^[27] On notera qu'il est différent demander aux équations d'une théorie « couvrante » de redonner les équations de la théorie ancienne, ou poser cette exigence au niveau des solutions des équations.

impulsion matériel $\mathfrak{T}_i^k$, qui satisfait l'équation

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \mathfrak{T}^{rs} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i} = 0. \quad (341a)$$

Cette hypothèse sera conservée ici. Comme le tenseur énergie de Maxwell (cf. § 54)

$$\mathfrak{S}_i^k = F_{ir} \mathfrak{F}^{kr} - \frac{1}{4} F_{rs} \mathfrak{F}^{rs} \delta_i^k \quad (222a)$$

ne satisfait cette condition que dans l'espace vide de charges, des termes supplémentaires doivent être ajoutés à $\mathfrak{S}_i^k$. Mie a supposé que ces termes sont de nature électrique, c'est-à-dire qu'ils sont fonction des grandeurs électriques F_{ik} , φ_i . Einstein au contraire suppose que *la cohésion des particules matérielles est assurée seulement par des forces gravitationnelles*, de sorte que ces termes additionnels doivent dépendre des g_{ik} et de leurs dérivées. Bien que le tenseur de Maxwell $\mathfrak{S}_i^k$ ne puisse plus être maintenant appelé le tenseur énergie total de la matière et ne satisfasse pas l'équation (341a), Einstein commence de manière tout-à-fait analogue au § 56 avec l'hypothèse que *ce tenseur énergie $\mathfrak{S}_i^k$ de Maxwell devrait être proportionnel à une expression différentielle du second ordre formée à partir des seuls g_{ik}* . Cette hypothèse simple est décisive pour la théorie d'Einstein. On conclut de cela et de l'exigence de covariance générale, comme au § 56, que les équations du champ doivent être de la forme

$$R_{ik} + \bar{c} R g_{ik} = -\chi S_{ik}.$$

L'ajout d'un autre terme, proportionnel à g_{ik} se révélera superflu ici. Mais comme l'équation (341a) pour $\mathfrak{S}_i^k$ n'est pas valable, nous n'avons plus le droit de poser, comme précédemment, $\bar{c} = -\frac{1}{2}$. Au lieu de cela, $\bar{c}$ est déterminé par une autre condition. Selon (??), le scalaire S_i^i s'annule. On doit poser $\bar{c} = -\frac{1}{4}$ de sorte que le scalaire du membre de gauche des équations de champ s'annule identiquement. [28] Dans ce cas, les équations du champ s'écrivent

$$R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R = -\chi S_{ik}. \quad (492)$$

De plus, les équations de la théorie de l'électron

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0 \quad (203)$$

et

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{ik}}{\partial x^k} = \mathfrak{s}^i; \quad (208)$$

doivent rester valables. Une simple énumération montre qu'il y a quatre inconnues de plus que le nombre d'équations indépendantes dans (203) et (492), comme requis par la théorie de la relativité générale. On doit aussi remarquer que les équations du champ n'apparaissent pas déductibles d'un principe d'action dans ce cas. Il résulte du § 54, (203) et (208) que la divergence de S_{ik} prend la valeur

$$-F_{ik} \mathfrak{s}^k$$

c'est-à-dire l'opposé du vecteur force de Lorentz. Par conséquent, la divergence des équations du champ (492) conduit à la relation

$$F_{ik} s^k - \frac{1}{4\chi} \frac{\partial R}{\partial x^i} = 0, \quad (493)$$

car la divergence de $R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R$ s'annule. Cette relation montre que pour ces équations de champ, les forces répulsives de Coulomb sont effectivement

[28] Cette constante vaut $-1/2$ en Relativité Générale à cause de la divergence nulle du membre de droite qui impose la même propriété au membre de gauche. Par conséquent en l'absence de matière, il n'y a pas de second membre, mais dans ce cas on a aussi $R = 0$. Ici le raisonnement est différent, on cherche une équation avec R non nul, mais du coup le membre de droite ne sera pas à divergence nulle.

maintenues en équilibre par une pression gravitationnelle. Si l'on pose $s^k = \rho_0 u^k$, il s'ensuit

$$\frac{\partial R}{\partial x^i} u^i = \frac{dR}{d\tau} = 0, \quad (494)$$

c'est-à-dire que R reste constant le long de la ligne d'univers d'un élément de matière donné. Dans l'espace libre de charges il résulte de (493) que

$$\frac{\partial R}{\partial x^i} = 0,$$

de sorte que

$$R = \text{const.} = R_0. \quad (495)$$

A l'intérieur d'une particule matérielle, R décroît continûment de la valeur R_0 à des valeurs de plus en plus petites jusqu'au centre de la particule. L'équation (493) montre que $(1/4\chi)R$ représente directement l'énergie potentielle des forces gravitationnelles qui maintiennent la particule.

Nous devons maintenant nous intéresser au tenseur énergie-impulsion de la matière T_{ik} . *Pour cela, l'équation (??) qui contient le « terme λ » doit rester valable.* De (??), on sait que $R = -4\lambda$ pour l'espace libre de matière. La comparaison avec (495) montre que l'on doit poser

$$R_0 = -4\lambda, \quad \lambda = -\frac{R_0}{4}. \quad (496)$$

C'est l'un des avantages principaux de cette nouvelle formulation que la constante λ n'y soit pas caractéristique de la loi fondamentale elle-même, mais prenne la signification d'une *constante d'intégration*. L'équation (??) peut maintenant être écrite

$$G_{ik} + \frac{1}{4}R_0 g_{ik} = -\chi T_{ik},$$

alors que (492) conduit à

$$G_{ik} + \frac{1}{4}R g_{ik} = -\chi S_{ik}.$$

La comparaison montre alors que

$$T_{ik} = S_{ik} + \frac{1}{4\chi}(R - R_0)g_{ik}. \quad (497)$$

Ce tenseur satisfait alors automatiquement l'équation précédente (??) en raison de (492); il satisfait donc aussi l'équation (341a). De plus il s'annule dans l'espace libre de matière. Il est donc parfaitement légitime, d'un point de vue physique, de l'appeler le tenseur énergie de la matière. La densité d'énergie matérielle $-\mathfrak{T}_4^4$ est composée de deux parties, l'une provenant du champ électromagnétique et l'autre du champ gravitationnel, toutes deux étant positives. Il est facile de voir qu'un univers d'extension spatiale finie, avec une densité de masse constante et stationnaire ($T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = 0$, $T_4^4 = -\mu_0 c^2$) est solution des nouvelles équations du champ. Toutes les relations du § 62(β) restent inchangées. Le tenseur électromagnétique S_i^k est en toute généralité

calculé à partir de (497),

$$S_i^k = T_i^k - \frac{1}{4} T \delta_i^k \quad (498)$$

de sorte que dans notre cas

$$S_1^1 = S_2^2 = S_3^3 = \frac{1}{4} \mu_0 c^2, \quad S_4^4 = -\frac{3}{4} \mu_0 c^2. \quad (499)$$

L'énergie d'un univers spatialement fini est pour trois quarts d'origine électromagnétique et pour un quart d'origine gravitationnelle. Cette contribution électromagnétique à l'énergie totale est exactement la même que celle obtenue au § 63 sur la base d'hypothèses spécifiques (non nécessairement correctes) sur la nature de l'électron.

Si l'on cherche maintenant à déterminer le champ d'une particule matérielle à partir des équations (203) ou (206), (208) et (492), respectivement, on voit qu'il manque une équation pour la détermination des inconnues dans le cas statique à symétrie sphérique. *En accord avec la théorie d'Einstein développée ici, toute distribution électrique statique à symétrie sphérique est en équilibre.* Quelque satisfaisante que soient les fondations de cette théorie, elle n'est pas non plus capable de fournir une réponse au problème de la structure de la matière.

67. Remarques générales sur l'état actuel du problème de la matière

†

Chacune des théories que nous avons discutées a ses avantages particuliers et ses défauts. Leur échec commun nous incite cependant à résumer les inconvénients et difficultés qu'elles partagent.

L'objet de toutes les théories continues est de déduire la nature atomique de l'électricité de la propriété que les équations différentielles exprimant les lois physiques n'admettent qu'un nombre discret de solutions qui soient régulières partout, statiques et de symétrie sphérique. En particulier, de telles solutions doivent exister pour chaque sorte d'électricité, positive et négative. Il est clair que les équations différentielles qui possèdent cette propriété doivent être de structure particulièrement compliquée. Il nous semble que cette complexité des lois physiques milite elle-même contre les théories continues. D'un point de vue physique, l'hypothèse atomique elle-même si simple et fondamentale, devrait être interprétée d'une manière également simple et élémentaire par la théorie et ne devrait pas, pour ainsi dire, apparaître comme une astuce d'analyse.

De plus, on a vu que les théories continues nécessitent l'introduction de forces spéciales qui maintiennent en équilibre les forces répulsives de Coulomb à l'intérieur des particules élémentaires chargées. Si l'on suppose que ces forces sont *de nature électrique*, on doit assigner une signification absolue au quadripotentiel qui conduit aux difficultés discutées au § 64. L'alternative selon laquelle les particules élémentaires sont maintenues ensemble par des *forces gravitationnelles* est cependant démentie par un argument empirique de poids ; on devrait alors s'attendre à ce qu'il existe une relation entre la masse gravitationnelle de l'électron et sa charge. De fait, la quantité sans dimension correspondante $e/(m\sqrt{k})$ (k étant la constante de gravitation usuelle) est de l'ordre de 10^{20} (voir aussi la § 59) ! [29]

[29] On appelle problème de hiérarchie cette différence faramineuse entre la constante de structure de la gravitation et celles des autres interactions.

† Voir note supplémentaire 23.

Il faut aussi imposer aux équations du champ de rendre compte de l'asymétrie (différence de masses) entre les deux sortes d'électricité. [‡] Il est cependant facile de voir que d'un point de vue formel c'est en contradiction avec la covariance générale des équations. Dans le cas statique, les équations du champ contiennent comme seule variable, outre les g_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$ ou $i = k = 4$), le potentiel électrostatique φ . Du fait de la covariance générale, les équations différentielles doivent en particulier être covariantes par renversement du temps $x'_4 = -x_4$. Mais alors φ devient $-\varphi$ [Et pourquoi ça ? Est-ce parce que l'antiparticule remonte le temps ? Voir avec Daniel.] alors que les g_{ik} demeurent inchangés (dans notre cas, $g_{ik} = 0$ pour $i = 1, 2, 3$). Il en résulte que si φ, g_{ik} (avec $g_{i4} = 0$) est une solution des équations du champ, il en est de même de $-\varphi, g_{ik}$ (avec $g_{i4} = 0$), ce qui contredit l'asymétrie des deux sortes d'électricité. On pourrait tenter d'éviter une telle conclusion en introduisant des fonctions d'action qui ne sont pas rationnelles comme indiqué à la fin du § 64. Mais tout d'abord les équations du champ deviendraient alors encore plus compliquée et d'autre part le choix de la branche non ambiguë de la fonction d'action ne pourrait pas être mené de manière généralement covariante, par exemple la covariance ne pourrait plus exister pour le renversement du temps $x'_4 = -x_4$.

Enfin, il reste enfin à évoquer un souci conceptuel.³⁹³ Les théories du continuum font un usage direct du concept ordinaire d'intensité du champ électrique, même pour les champs à l'intérieur de l'électron. Cette intensité du champ est toutefois définie par la force agissant sur une particule test et puisqu'il n'y a pas de particule test plus petite qu'un électron ou un noyau d'hydrogène, cette intensité en un point donné de l'intérieur d'une telle particule se révélerait par principe inobservable et serait une fiction dénué de contenu physique.

Quelqu'attitude qu'on puisse avoir à l'égard de ces arguments, il semble quasiment certain que de nouveaux éléments, étrangers à la conception de continuum du champ, devront être ajoutés aux fondations des théories développées jusqu'à présent avant d'aboutir à une solution satisfaisante au problème de la matière.

(111)

Commentaires

(1)

L'électrodynamique ordinaire laisse le quadripotential en partie indéterminé, sa valeur dans l'absolu n'étant fixée qu'à un choix de jauge près, comme la jauge de Lorenz $\frac{\partial \varphi^k}{\partial x^k} = 0$. La théorie de Mie ne possède donc pas cette liberté de jauge alors que les physiciens y sont extrêmement attachés pour plusieurs raisons. Tout d'abord les symétries de jauge sont des symétries continues dont découlent par les théorèmes de Noether l'existence de lois de conservation, comme celle de la charge électrique en électrodynamique. Relier une loi de conservation à une symétrie est probablement plus satisfaisant sur un plan formel que la déduire d'équations du mouvement (les équations de Maxwell dans le cas présent). D'autre part, lorsque l'invariance de jauge est étendue aux transformations de jauge locales, on engendre de manière automatique à partir d'une théorie pour le champ de matière libre une

[‡]Voir note supplémentaire 21.

³⁹³Cf. note de bas de page 391, p. 202, W. Pauli, jr., *ibid.*, et "Nauheimer Diskussion", *Phys.Z.*, **21** (1920) 650.

théorie de son interaction avec le champ de jauge et une théorie du champ de jauge libre lui-même.

Rappelons les grandes étapes du procédé dans le langage actuel de la physique. Dans l'espace-temps de Minkowski M_4 , les transformations de jauge sont définies de la manière suivante : un champ de matière (par exemple ici un champ scalaire) $\psi(x)$ peut être modifié par une phase globale $e^{ie\alpha}$ sans que cela change les équations du mouvement. Cette *symétrie de jauge globale* possède un courant de Noether associé dont la conservation correspond physiquement à celle de la charge électrique. De manière à engendrer l'interaction électrique, la symétrie de jauge est étendue aux *transformations de jauge locales*

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\psi(x) \quad (463)$$

et la dérivée ordinaire ∂_k est promue en *dérivée covariante de jauge électromagnétique* $\mathcal{D}_k(x)$ en termes d'un quadrivecteur réel $\varphi_k(x)$

$$\mathcal{D}_k(x) = \partial_k - ie\varphi_k(x) \quad (464)$$

et obéit à

$$\mathcal{D}_k(x)\psi(x) \rightarrow \mathcal{D}'_k(x)\psi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\mathcal{D}_k(x)\psi(x) \quad (465)$$

à la condition que le quadrivecteur lui-même satisfasse la transformation de jauge

$$\varphi_k(x) \rightarrow \varphi'_k(x) = \varphi_k(x) + \partial_k\alpha(x). \quad (466)$$

La prescription de *couplage minimal électromagnétique* consiste ensuite à remplacer les dérivées ordinaires dans le lagrangien des particules libres

$$\mathcal{L}_{KG}^{\text{free}} = \partial_k\psi^*\partial^k\psi - m^2\psi^*\psi \quad (467)$$

par les dérivées covariantes et cela engendre des termes nouveaux, physiquement significatifs

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{KG} &= (\mathcal{D}_k\psi)^*(\mathcal{D}^k\psi) - m^2\psi^*\psi \\ &= \partial_k\psi^*\partial^k\psi - m^2\psi^*\psi \\ &\quad - ie[\varphi_k\psi^*(\partial^k\psi) - \varphi^k(\partial_k\psi^*)\psi] + e^2\varphi_k\varphi^k\psi^*\psi \end{aligned} \quad (468)$$

qui décrivent l'interaction du champ de matière avec le champ de jauge φ_k . Le premier de ces termes est usuellement appelé paramagnétique et le second diamagnétique. En raison des lois de transformation (463) et (465), le lagrangien (468) est invariant de jauge, et, probablement plus important, c'est précisément la prescription de couplage minimal qui a produit les termes d'interaction adéquats.

Le champ de jauge libre lui-même est décrit par une densité lagrangienne comme une forme invariante de jauge, quadratique en termes des dérivées de φ_k . C'est réalisé de la manière suivante, le commutateur des dérivées covariantes définit le tenseur de Maxwell F_{kl} ,

$$[\mathcal{D}_k(x), \mathcal{D}_l(x)] = -ie(\partial_k\varphi_l(x) - \partial_l\varphi_k(x)) \equiv -ieF_{kl}(x), \quad (469)$$

et le lagrangien du champ de jauge libre vaut

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{kl}F^{kl}. \quad (470)$$

L'équation (466) garantit que le tenseur de Maxwell soit invariant de jauge (covariant de jauge de manière plus générale),

$$F_{kl}(x) \rightarrow F'_{kl}(x) = F_{kl}(x) \quad (471)$$

et que le lagrangien libre possède par conséquent cette propriété.

(2) Pauli utilise ici la convention selon laquelle le couplage aux sources s^i est décrit dans le lagrangien par un terme $-2s^i\varphi_i$ de sorte que la densité de courant est donnée par $s^i = -\frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i}$ là où la convention actuelle ne comprend pas le facteur 1/2. Il utilise aussi pour la contribution du champ libre (dans le cas de Maxwell) l'expression (230) $\frac{1}{2}F_{ik}F^{ik}$, elle aussi multipliée par un facteur 2 par rapport au choix actuel, de sorte que les équations de mouvement ont la forme habituelle (208), $\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = s^i$.

(3) Il s'agit là de la manière qu'a aussi utilisée Weyl pour déterminer les lois de conservation plutôt que par l'usage du théorème de E. Noether. [Demander à Raph de faire un commentaire sur les théorèmes de Noether.]

(4) La terminologie a évolué avant de se fixer sur Eichinvarianz :

“Weyl’s papers on physics were rambling, discursive and philosophical. They were also extraordinarily original. He was exploring new ideas, so there was great fluidity in his style. He frequently changed names for key concepts. Proportionalität later became Strecke, so that when Schrödinger in 1922 referred to the Proportionalitätsfaktor, it became Streckenfaktor (see Yang Ref. 146). When the concept of gauge invariance first came up, he called it Massstab-Invarianz. But later he settled on Eichinvarianz. English translation of this term is now gauge invariance, but had been at times calibration invariance and measure invariance.”

(A.C.T. Wu and C.N. Yang, *Int. J. Mod. Phys. A*, **21** (2006) 3235)

Notes supplémentaires de Pauli

p. 223

Note 20. (Fr. p. ???)³⁹⁴

Ici l'invariant [voir (54a), p. 33)]^[30]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(F_{23}F_{14} + F_{31}F_{24} + F_{12}F_{34}) = \frac{1}{4}F_{ik}F^{*ik}$$

a été oublié par erreur. [Annexe à faire sur le formalisme en formes, en indices, en matrices, cf Gourgoulhon ?] La quantité n'est pas invariante par rapport aux réflexions des coordonnées spatiales ($x'_a = -x_a$ pour $a = 1,2,3$), mais change de signe par cette transformation (pseudo-scalaire). Comme les lagrangiens que l'on rencontre dans la nature sont invariants par réflexion spatiale, seul le carré de cette quantité peut apparaître.^[31] C'est réellement le cas dans l'application de la théorie quantique du positron à la polarisation du vide dans des champs électrique et magnétique externes homogènes, comme cela a été montré par W. Heisenberg et H. Euler, *Z. Phys.*, **98** (1936) 714. Cela joue aussi un rôle dans l'électrodynamique non linéaire de M. Born, *Proc. Roy. Soc. A***143** (1934) 410 et de M. Born et L. Infeld, *Proc. Roy. Soc. A***144** (1934) 425, **147** (1934) 552, **150** (1935) 141. [Note sur Born et Infeld à faire]

Les autres invariants mentionnés sous (2) et (4), p. 189 ont aussi été totalement abandonnés en raison de leur non invariance de jauge.

Note 21. (pp. 192, 202 et 205)

Après que les propriétés des négatons et positons^[32] se sont avérées exactement symétriques, l'antiproton négatif a été trouvé expérimentalement.[†] Tous les arguments dans le texte qui sont basés "sur une asymétrie des deux formes d'électricité" doivent être éliminés.

Note 22. (pp. 192-202) Théorie de Weyl

Bien qu'il n'y ait jamais eu de raison empirique de croire que les longueurs et les durées de règles et d'horloges dépendent de leur préhistoire (voir § 65(β)), la situation théorique a aussi évolué significativement depuis l'élaboration de la mécanique quantique. Dans cette théorie, l'équation d'onde complexe décrivant la matière électriquement chargée (la fonction d'onde ψ peut avoir une ou plusieurs composantes) autorise le groupe de transformations

$$\varphi_i' = \varphi_i - i\frac{\hbar c}{\epsilon} \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad \psi' = \psi e^{if(x)} \quad (1)$$

ce qui est analogue à la transformation (477) de la théorie originale de Weyl, mais avec un exposant imaginaire dans ψ à la place de l'exposant réel dans g_{ik}

³⁹⁴ All. p. ???, An. p. 189

[†] O. Chamberlain, E. Segré, C. Wiegand and Th. Ypsilantis, *Phys. Rev.*, **100** (1955) 947.

p. 223

^[30] Les numeros de page se réfèrent à l'édition anglaise. Attention, j'ai ici un mélange entre l'édition Pergamon Press et l'édition Dover, il faudra faire un choix et le spécifier en préambule.
^[31] Nous sommes avant l'article de Lee et Yang sur la brisure de symétrie de parité par l'interaction faible.

^[32] On parle aujourd'hui d'électrons et positrons.

($\hbar$ = constante de Planck divisée par 2π , e = charge électrique élémentaire). De plus, le lien de la loi de conservation de la charge électrique avec le nouveau groupe est le même qu'avec l'ancienne théorie.

London,[‡] et Weyl lui-même^{||} ont tous deux reconnu ce fait rapidement p. 224 après la découverte de la mécanique ondulatoire [Prévoir ici un comment sur Schrödinger et Fock en suivant le point de vue de O'Raffearthaigh]. Depuis lors, le terme de groupe de jauge est employé pour désigner le groupe (1) en mécanique ondulatoire, en référence comme origine historique à la théorie de Weyl sur les longueurs non-intégrables.

Il n'y avait cependant plus aucune raison de croire à une non intégrabilité des longueurs et Weyl lui-même a affirmé l'échec de son ancienne théorie. Il semble y avoir maintenant consensus sur le fait que les g_{ik} eux-mêmes, et non uniquement leurs rapports, restent inchangés lorsqu'un gradient est ajouté aux potentiels électromagnétiques.[†]

Note 23. (pp. 205-206) Autres tentatives de théories unitaires

Avant d'évoquer plus en détail quelques propositions pour l'« unification » des théories des champs, il est nécessaire de faire quelques remarques de base sur les limitations de la physique classique des champs continus. Celles-ci sont liées à la dualité des propriétés de la matière, caractérisée par la perception intuitive d'« ondes » et de « particules » et décrite par un nouveau type de lois statistiques établies en mécanique quantique (ou mécanique ondulatoire) depuis 1927.[‡] La plupart des physiciens, y compris l'auteur, sont d'accord avec l'analyse de Bohr et d'Heisenberg et leur jugement sur la situation épistémologique créée par ces développements, selon laquelle une solution complète aux problèmes ouverts de la physique est impossible par un retour au concept de champ classique.

[‡]F. London, *Z. Phys.* **42** (1927) 375.

^{||}H. Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (Leipzig 1928 ; 2nde édition, 1931) ; *Z. Phys.* **56** (1929) 330 ; Rouse Ball lecture 'Geometry and Physics', *Naturwissenschaften* **19** (1931), pp 49-58. Report '50 Jahre Relativitätstheorie', *Naturwissenschaften* **38** (1951), 73.

[†]Indépendamment de la transformation des potentiels électromagnétiques, on peut considérer la transformation conforme $g'_{ik} = \lambda g_{ik}$ avec une fonction arbitraire $\lambda(x)$ [voir p. 81 et 199 pour les équations de Maxwell]. R. Bach, *Math. Z.* **9** (1921) 110 (voir aussi C. Lanczos, *Ann. Math., Princeton* **39** (1938) 842) a montré qu'il est mathématiquement possible de construire des équations de champ possédant cette invariance en utilisant dans le principe d'action une densité scalaire du second degré dans les composantes du tenseur de courbure conforme [pour ce dernier, voir H. Weyl, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-naturw. Kl.*, (1921) 99].

Einstein a également considéré les équations de gravitation en prenant en considération l'invariance conforme [*S.B. preuss. Akad. Wiss.* (1921) 261]. Ce point de vue a cependant rapidement été abandonné car il ne semble pas avoir de signification physique. [Prévoir commentaire sur des tentatives récentes d'explication cosmologiques alternatives à la matière noire ou à l'énergie sombre dans le contexte de la gravité conforme de Weyl.]

[‡]Il faut insister sur le fait que non seulement le concept de particule de la mécanique classique, mais aussi celui d'onde de la théories classique des champs ont subi un changement fondamental avec la mécanique quantique. En effet, comme Schrödinger l'a montré, les systèmes de particules en interactions ne peuvent être décrits que par des ondes dans un espace de configuration multidimensionnel et non par des ondes dans l'espace-temps ordinaire. Lorsque des particules sont créés et annihilés (changement du nombre de particules au cours du temps), plusieurs espaces de configuration de dimensions différentes sont requis. De manière équivalente, la « quantification des champs » remplace les amplitudes des champs dans l'espace ordinaire par des opérateurs convenablement choisis. Voir P. Jordan et O. Klein, *Z. Phys.*, **45** (1927) 751 ; P. Jordan and E. Wigner, *Z. Phys.*, **47** (1928) 631 ; V. Fock, *Z. Phys.*, **75** (1932) 622.

D'un autre côté, Einstein, après avoir révolutionné les façons de penser en physique par des méthodes générales également fondamentales pour la mécanique quantique et son interprétation, a entretenu jusqu'à sa mort l'espoir que même les aspects quantiques des phénomènes atomiques devraient pouvoir s'expliquer sur la base de la théorie classique des champs. Le concept de réalité physique en physique atomique a été généralisé par la complémentarité de Bohr d'une manière telle que l'ensemble du dispositif expérimental constitue une partie essentielle de la description théorique du phénomène. Einstein au contraire voulait rester fidèle à l'idéal de la mécanique céleste classique selon lequel l'état physique objectif d'un système doit être entièrement indépendant de la manière de l'observer.

Alors qu'Einstein admettait franchement que ses espoirs d'une solution suivant cette voie n'avaient pas encore été atteints et qu'il n'avait pas même établi la possibilité d'une telle théorie, il considérait cela comme une question ouverte. Lorsqu'il parle d'une « théorie unifiée des champs » il a en tête ce programme ambitieux d'une théorie résolvant les problèmes liés aux particules matérielles élémentaires à l'aide de champs classiques partout réguliers (dénués de singularités). p. 225

Les physiciens adoptant l'interprétation d'Heisenberg-Bohr de la mécanique quantique ne prennent en considération l'unification des champs classiques comme le champ gravitationnel et le champ électromagnétique que d'une manière restrictive qui ne rend pas compte des sources comme les masses et les charges électriques. En effet, la description des sources et de leurs propriétés suppose des champs de matière et leur quantification avec l'interprétation statistique[†]. Cependant, même cet autre programme semble encore loin d'être réalisé.

Le lecteur du texte original du § 67, réalisera que j'étais déjà à l'époque très sceptique au sujet de la possibilité d'expliquer le caractère atomique de la matière, en particulier de la charge électrique, seulement à l'aide des concepts classiques de la théorie des champs continus. Dans cet ordre d'idées, rappelons que l'atomicité de la charge électrique s'était déjà manifesté à travers la valeur numérique spécifique de la constante de structure fine dont il manque encore à ce jour une explication théorique. [Expliquer ici qu'on pensait que $1/\alpha$ était un entier 137. Et peut-être l'ésotérisme de Pauli et de sa chambre 137 à l'hôpital ?] En particulier je ressentais assez fortement le caractère fondamental de la dualité (ou comme on dit depuis 1927 de la complémentarité) entre le champ mesuré et la particule d'épreuve utilisée comme instrument de mesure. Cette question a été discutée depuis par N. Bohr à la huitième Conférence Solvay de Physique en 1948 [voir les actes de ce congrès (Bruxelles 1950) pp. 376-380].

Après ces remarques d'introduction d'ordre assez général, nous allons discuter deux types de tentatives d'unification des champs généralisant formellement la théorie originale de la relativité d'Einstein dans des directions différentes.

(α) *Théories où les g_{ik} et les Γ^l_{ik} ne sont pas symétriques*[‡] Ces théories ont deux versions : la première dans laquelle des Γ^l_{ik} symétriques ou non sy-

[†] Voir note de bas de page ‡, p ???

[‡] Comparer à A.S. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity* (Cambridge, 1924) ; différents articles d'A. Einstein in *S.B. Preuss. Akad. Wiss.*, (1923-1925) ; E. Schrödinger, *Space-Time-Structure* (Cambridge 1950), où les articles de l'auteur dans *Proc. Roy. Irish Acad.* (1943-1948) et les équations de A. Einstein et E.G. Straus, *Ann. Math. Princeton*, (2) **47** (1946) 731 sont résumés. Voir aussi A. Einstein, *Ann. Math. Princeton*, (2) **46** (1945) 538.

métriques ont été considérés comme les seules quantités primaires et la plus tardive dans laquelle à la fois des Γ^l_{ik} non symétriques et des g_{ik} ou g^{ik} non symétriques sont considérés comme des variables indépendantes. Dans les premières versions le tenseur métrique est supposé proportionnel à la partie symétrique R_{ik} du tenseur de courbure contracté.

Cette supposition n'est justifiée que si un terme cosmologique est présent dans les équations du champ. Comme ceci n'a plus de raison d'être, [33] on s'en tiendra au second type de théories dans lesquelles des Γ^l_{ik} et des g_{ik} non symétriques sont considérés comme des variables indépendantes. Par conséquent, seul ce second type de théorie a été étudié ultérieurement par Einstein.

Toutes ces théories se heurtent à l'objection qu'elles contredisent le principe selon lequel *on ne devrait utiliser en théorie des champs que des quantités irréductibles*. Ce principe est en effet satisfaisant du point de vue formel et a été vérifié empiriquement sans aucune exception en physique jusqu'à présent. [BB ne sait pas ce que c'est.] Par conséquent je crois que[†] des *raisons mathématiques convaincantes*, par exemple un principe d'invariance sous un groupe de transformation plus vaste *doivent être apportées, justifiant qu'une décomposition des quantités réductibles de la théorie, par exemple R_{ik} , g_{ik} et Γ^l_{ik} n'a pas lieu*. Cela n'a pas été fait du tout dans la littérature plus ancienne.[‡]

Einstein était cependant au fait de cette objection qu'il a pesée soigneusement dans son travail ultérieur.^{||}

De manière à exposer le point de vue d'Einstein et Kaufman, on note d'abord que l'expression correcte du tenseur de courbure contracté R_{ik} en fonction des symboles non symétriques Γ^l_{ik} est[§]

$$R_{ik} = \Gamma^s_{ik,s} - \Gamma^s_{is,k} - \Gamma^s_{it}\Gamma^t_{sk} + \Gamma^s_{ik}\Gamma^t_{st}, \quad (23.1)$$

où l'ordre des indices inférieurs est important maintenant. Les auteurs notent de plus que cette expression est invariante par rapport aux *transformations*— λ , définies par

$$\Gamma^{l'}_{ik} = \Gamma^l_{ik} + \delta^l_{ik}\lambda_{,k} \quad (23.2)$$

où $\lambda(x)$ est une fonction arbitraire. Ils introduisent maintenant le postulat que toutes les équations doivent être invariantes par rapport à ces *transformations*— λ (λ —invariance). *Formellement, ce postulat rend impossible l'utilisation de Γ^l_{ik} symétriques*.

Comme second postulat, Einstein et Kaufman introduisent l'*invariance par transposition*. Cela demande que *toutes les équations restent valables si les quantités A_{ik} sont remplacées par leurs transposées $A^T_{ik} = A_{ki}$* . Les R_{ik} exprimées en fonction des Γ^l_{ik} ne sont pas invariants par transposition. Cette invariance peut cependant être obtenue si de nouvelles quantités, définies par

$$\begin{aligned} U^l_{ik} &= \Gamma^l_{ik} - \Gamma^t_{it}\delta^l_k, \\ \Gamma^l_{ik} &= U^l_{ik} - \frac{1}{3}\Gamma^t_{it}\delta^l_k, \end{aligned} \quad (23.3)$$

[†]Le même point de vue est avancé par H. Weyl [*Naturwissenschaften*, **38** (1951) 73, et Actes du Congrès de Berne, 1955]

[‡]Déjà dans une théorie avec des Γ^l_{ik} symétriques comme uniques variables de champ indépendantes, il est par exemple arbitraire d'utiliser $\sqrt{(-\det|R_{ik}|)}$ comme densité dans l'intégrale d'action. La séparation de R_{ik} en ses parties symétrique et antisymétrique donne bien d'autres possibilités (voir Note 7).

^{||}A. Einstein and B. Kaufman, *Ann. Math. Princeton*, **62** (1955) 128; voir aussi *The Meaning of Relativity*, (5ème édition, Princeton, 1955), Appendice II.

[§]Dans la suite, l'opération $(\dots)_{,k}$ signifie toujours la différenciation ordinaire par rapport à x^k . Le signe global de R_{ik} , choisi par Einstein et Kaufman et reproduit ici, est opposé au signe utilisé ailleurs dans ce livre.

[33] Parmi les « opposants » au terme Λ , on peut mentionner, avec Pauli, des auteurs influents comme Landau et Lifshitz, « If one ascribes a small value to the “cosmological constant” Λ , the presence of this term will not significantly affect gravitational waves over not too large regions of space-time, but it will lead to the appearance of new types of “cosmological solutions” which could describe the universe as a whole. At the present time however, there are no cogent and convincing reasons, observational or theoretical, for such a change in the form of the fundamental equation of the theory. We emphasize that we are talking about changes that have a profound physical significance : introducing into the Lagrange density a constant term (...)] would mean that we ascribe to space-time a curvature which cannot be eliminated in principle and is not associated with either matter or gravitational waves. (...) [T]his section is therefore based on the Einstein equations in their classical form without the “cosmological constant”. » (L.D. Landau et E. Lifshitz, *The classical theory of fields*, Amsterdam : Butterworth Heinemann (1975)) ou Feynman, « I agree with Einstein's second guessing and think $\Lambda = 0$ is most likely. » (R.P.Feynman *Feynman lectures on gravitation*, Boulder : Westview Press (1995)).

sont introduites. Le tenseur de courbure contracté, exprimé en termes des U^l_{ik} est donné par

$$R_{ik}(U) = U^s_{ik,s} - U^s_{it}U^t_{sk} + \frac{1}{3}U^s_{is}U^t_{tk} \quad (23.4)$$

p. 227 est maintenant invariant par transposition. La transformation $-\lambda$ des U^l_{ik} est donnée par

$$U'^l_{ik} = U^l_{ik} + (\delta^l_i \lambda_{,k} - \delta^l_k \lambda_{,i}). \quad (23.5)$$

Pour la loi de transformation des U^l_{ik} par transformation des coordonnées, nous nous référons au papier cité dans la note de bas de page ||, p. 226XXXX. On obtient les équations de champ par variation de l'intégrale d'action *par rapport au g^{ik} et U^l_{ik} comme variables indépendantes.*

A la place des g^{ik} , on peut aussi utiliser la densité tensorielle de composantes $\mathfrak{g}^{ik}$, qui, dans l'espace-temps quadrimensionnel sont données par

$$\mathfrak{g}^{ik} = \frac{g^{ik}}{\sqrt{-\det|g^{ik}|}}, \quad g^{ik} = \frac{\mathfrak{g}^{ik}}{\sqrt{-\det|\mathfrak{g}^{ik}|}}. \quad (23.6)$$

C'est dans l'esprit de la relativité générale ordinaire (voir p. 48XXXX) que l'on restreigne la densité scalaire $\mathfrak{L}$ qui doit être utilisée dans le principe variationnel par le postulat selon lequel elle ne contienne pas de dérivées des g^{ik} , uniquement les dérivées premières des U^l_{ik} , et qu'elle dépende linéairement de ces dernières. [†] Ce postulat, associé aux postulats de λ -invariance et d'invariance par transposition déjà mentionnés, conduit à un $\mathfrak{L}$ qui est linéaire en R_{ik} , exprimé en termes des U^l_{ik} . Si le terme « cosmologique » indépendant de R_{ik} est évité, alors une définition convenable du champ g^{ik} , avec $\mathfrak{g}^{ik}$ défini par (23.6) conduit au choix d'Einstein de la densité scalaire,

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{g}^{ik} R_{ik} \quad (23.7)$$

comme intégrand dans l'intégrale d'action satisfaisant les postulats précédents.

Nous renvoyons à la littérature citée pour les équations de champ qui s'en déduisent ainsi que pour les identités entre elles. Le cas particulier, dans lequel les parties antisymétriques des g^{ik} et Γ^l_{ik} s'annulent, redonne les équations de champ usuelles de la relativité générale sans matière (voir Note 8).

Que les équations de champ de cette théorie, qui sont basées sur les postulats formels de λ -invariance et d'invariance par transposition sans signification évidente ni géométrique ni physique, puisse vraiment être en rien reliées à la physique est très douteux.

Un principe physique primordial comme le principe d'équivalence en relativité générale, est basé sur des preuves empiriques générales, est entièrement absent de cette « théorie unifiée des champs ». De plus, en relativité générale ordinaire, c'est l'élément de longueur, et avec lui la forme quadratique $g_{ik}dx^i dx^k$, qui a une signification physique directe, plutôt que le pseudo-tenseur Γ^l_{ik} qui gouverne le déplacement parallèle des vecteurs.

Dans la suite, nous allons considérer d'autres types de tentatives pour obtenir une « théorie unifiée des champs », dans laquelle seules des quantités irréductibles sont utilisées.

[†]La discussion des densités possibles pour les théories purement affines dans la Note 7 a

(β) *Théories à cinq dimensions et théories projectives* [†] Kaluza^{||} a trouvé une représentation géométrique intéressante de la forme généralement covariante de l'électrodynamique de Maxwell [§ s 23(a) et 54], qui a ensuite été améliorée p. 228 et généralisée par Klein.[†]

On considère un espace-temps à cinq dimensions avec une métrique « cylindrique » donnée par

$$ds^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (23.8)$$

(dans la suite, les indices grecs μ, ν varient de 1 à 5, et les indices latins $i, k, \dots$ de 1 à 4). La condition cylindrique est mieux décrite dans un système de coordonnées particulier[†] dans lequel les $\gamma_{\mu\nu}$ sont indépendants de x^5 ,

$$\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^5} = 0. \quad (23.9)$$

De plus, Kaluza et Klein ont initialement supposé que

$$\gamma_{55} = 1. \quad (23.10)$$

Le signe positif de γ_{55} implique que la cinquième dimension est de genre espace. La raison de ce choix deviendra évidente plus tard. À côté des transformations générales de coordonnées des quatre coordonnées x^k , comme en relativité générale, le système de coordonnées préférentiel en question permet le groupe

$$x'^5 = x^5 + f(x^1, \dots, x^4). \quad (23.11)$$

En écrivant (23.8) sous la forme

$$ds^2 = (dx^5 + \gamma_{i5} dx^i)^2 + g_{ik} dx^i dx^k, \quad (23.12)$$

on voit que les g_{ik} sont invariants sous la transformation (23.11),

$$g'_{ik} = g_{ik}, \quad (23.13)$$

alors que

$$\gamma'_{i5} = \gamma_{i5} - \frac{\partial f}{\partial x^i}. \quad (23.14)$$

La comparaison entre (23.8) et (23.12) donne

$$\gamma_{ik} = g_{ik} + \gamma_{i5} \gamma_{k5}. \quad (23.15)$$

Si g^{ik} est, comme d'habitude, la matrice inverse de g_{ik} , $\gamma^{\mu\nu}$ la matrice inverse de $\gamma_{\mu\nu}$, on trouve facilement que

$$\det |\gamma_{\mu\nu}| = \det |g_{ik}|, \quad \gamma^{55} = 1 + \gamma^{ik} \gamma_{i5} \gamma_{k5}, \quad \gamma^{i5} = -g^{ik} \gamma_{k5}, \quad \gamma^{ik} = g^{ik}. \quad (23.16)$$

La forme de la transformation (23.14), qui est analogue au groupe de jauge, suggère l'identification des γ_{i5} avec le potentiel électromagnétique, φ_i , à un p. 229

été faite sans utiliser ces postulats restrictifs.

[†] Le lecteur trouvera un résumé des théories discutées ici dans P.G. Bergmann, *Une introduction à la théorie de la relativité* (New-York 1942), Chap. XVII et XVIII.

^{||} Th. Kaluza, *S.B. preuss. Akad. Wiss.* (1921) 966.

[†] O. Klein, *Nature, Lond.*, **118** (1926) 516; *Z. Phys.* **37** (1926) 895 [dans ces papiers déjà, une dépendance périodique de la métrique avec la cinquième coordonnée est prise en considération]; *Z. Phys.* **46** (1928) 188; *Ark. Mat. Astr. Fys.* **34** (1946) 1; voir aussi le rapport de Klein dans les Actes du Congrès de Bern, 1955.

[‡] Pour la formulation de la théorie dans un système de coordonnées général, voir Berg-

facteur de proportionnalité constant près. Le tenseur antisymétrique

$$\frac{\partial \gamma_{k5}}{\partial x^i} - \frac{\partial \gamma_{i5}}{\partial x^k} = f_{ik}, \quad (23.17)$$

qui est invariant par rapport à la « transformation de jauge » (23.14), est alors proportionnel au tenseur intensité du champ électromagnétique. Nous reviendrons plus loin sur la définition du facteur de proportionnalité.

Les géodésiques de la métrique (23.8) ou (23.12) peuvent aussi être interprétées de cette manière. De l'indépendance des $\gamma_{\mu\nu}$ par rapport à x_5 , on déduit aisément pour les géodésiques que les deux expressions

$$\frac{dx^5}{ds} + \gamma_{i5} \frac{dx^i}{ds} = \text{const.} = C, \quad (23.18)$$

$$g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} = \text{const.} = -1, \quad (23.18a)$$

sont séparément constantes pour un choix convenable du paramètre s . La constante dans (23.18a) peut être normalisée à -1 . Pour les équations des géodésiques, on obtient

$$\frac{d}{ds} \left(g_{ik} \frac{dx^k}{ds} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i} \frac{dx^r}{ds} \frac{dx^s}{ds} = C f_{ik} \frac{dx^k}{ds}. \quad (23.19)$$

Il s'agit cependant de l'équation de l'orbite d'une particule chargée dans des champs gravitationnel et électromagnétique externes. La constante d'intégration C est par conséquent proportionnelle au quotient e/m de la charge par la masse de la particule.

Mentionnons ici brièvement une autre formulation équivalente de la géométrisation des champs gravitationnel et électromagnétique, c'est-à-dire la formulation *projective*. De nombreux auteurs y ont contribué parmi lesquels Veblen et Hoffmann, Schouten et van Dantzig et moi-même. [†] Bergmann[‡] a cependant montré – et ceci au contraire de ce que j'ai moi-même pensé pendant un temps – que cette formulation *n'est pas* plus générale que celle de Kaluza, et qu'il est facile de passer de l'une à l'autre de ces formulations. En introduisant les coordonnées homogènes X^ν

$$X^\nu = f^\nu(x^i) e^{x_5} \quad (23.20)$$

(avec des fonctions arbitraires f^ν) et les relations inverses

$$\begin{aligned} x^i &= g^i \left(\frac{X^1}{X^5}, \dots, \frac{X^4}{X^5} \right) \\ x^5 &= \log \left\{ X^5 F \left(\frac{X^1}{X^5}, \dots, \frac{X^4}{X^5} \right) \right\} = \log H^{(1)}(X^1, \dots, X^5), \end{aligned} \quad (23.20a)$$

où $H^{(1)}$ est une fonction homogène de degré 1, on voit facilement que la transformation « de jauge » (23.11), combinée à la transformation générale des x^k correspond exactement au *groupe de toutes les transformations homogènes du premier degré des X^ν* . C'est ce dernier qui est considéré dans la formulation

mann, note de bas de page ‡, p. 227XXXXXXX, *ibid*.

[†]Pour la littérature, aux côtés de Bergmann, note de bas de page ‡, p. 227XXXXXXX,

projective. En raison de sa correspondance bi-univoque avec la formulation de Kaluza[†] on ne discutera pas davantage la formulation projective ici.

La forme géométrique de Kaluza des lois généralement covariantes du champ électromagnétique, comme présentée ici, *ne constitue en aucune manière une « unification » des champs électromagnétique et gravitationnel*. Au contraire, toute théorie généralement covariante et invariante de jauge peut aussi être formulée sous une forme de Kaluza. En l'absence de charges électriques (de courants), la forme généralement covariante des équations de Maxwell découle par variation d'une intégrale d'action avec une densité [voir Eq. (??), p. 158XXXX et Eqs. (??), (??), p. 162XXXX]

$$\mathfrak{L} = \sqrt{-g} \left(R + \frac{\kappa}{2} F_{ik} F^{ik} \right), \quad (23.21)$$

si F_{ik} est l'intensité du champ électromagnétique. Une dépendance plus compliquée de la densité scalaire en fonction de l'intensité du champ électromagnétique serait cependant également compatible avec la métrique penta-dimensionnelle à symétrie cylindrique.

Kaluza et Klein ont cependant démontré un autre résultat intéressant. Ils ont calculé le scalaire P du tenseur de courbure qui correspond à la métrique penta-dimensionnelle particulière donnée par (23.8) et (23.12) et ont trouvé

$$P = R + \frac{1}{4} f_{ik} f^{ik} \quad (23.22)$$

où R est le scalaire de courbure déduit de la métrique quadri-dimensionnelle $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$, et f_{ik} est défini par (23.17). Cela devient identique à (23.21) si l'on pose

$$f_{ik} = \sqrt{2\kappa} F_{ik}, \quad \gamma_{i5} = \sqrt{2\kappa} \varphi_i. \quad (23.23)$$

Ici, on doit de plus noter que le signe du second terme du membre de droite de (23.22) aurait été inversé si l'on avait choisi un caractère de genre temps pour la cinquième coordonnée ($\gamma_{55} = -1$) au lieu du genre espace. Le caractère de genre espace de la cinquième dimension avait dû être choisi pour que dans (23.22) le signe du membre de droite soit le même que dans (23.21). On peut aussi dire que pour le choix de P comme invariant de l'intégrale d'action, le signe empirique de la constante de gravitation est représenté par le signe de genre espace de γ_{55} .

Il n'y a toutefois aucune justification pour le choix particulier du scalaire de courbure penta-dimensionnel P comme intégrand de l'intégrale d'action du point de vue du groupe restreint de la métrique cylindrique. Le problème ouvert de trouver une telle justification semble conduire à une amplification du groupe de transformation. C'est lié aux possibilités de généraliser le formalisme de Kaluza, que nous allons maintenant discuter brièvement.

L'une des généralisations du formalisme de Kaluza consiste à conserver (23.9), mais en relaxant la condition (23.10), $\gamma_{55} = 1$. Du point de vue du

ibid., voir par exemple C. Ludwig-Fortschritte der projektiven Relativitätstheorie, (Braunschweig 1951).

[†]Pour le tenseur métrique $\Gamma_{\mu\nu}$ correspondant à X^ν , on a, d'après (23.20),

$$\gamma_{55} = \Gamma_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^5} \frac{\partial X^\nu}{\partial x^5} = \Gamma_{\mu\nu} X^\mu X^\nu.$$

groupe de transformation de la relativité générale, γ_{55} est alors un nouveau p. 231 champ scalaire qui est supposé indépendant de x^5 . En posant

$$\gamma_{55} = J, \quad \gamma_{i5} = Jf_i, \quad \gamma_{ik} = g_{ik} + Jf_if_k, \quad (23.24)$$

on obtient

$$ds^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = J(dx^5 + f_i dx^i)^2 + g_{ik} dx^i dx^k, \quad (23.25)$$

avec un groupe « de jauge »

$$x'^5 = x^5 + f(x^i), \quad f'_i = f_i - \frac{\partial f}{\partial x^i}. \quad (23.26)$$

Jordan,[†] reprenant des idées antérieures de Dirac,[‡] a essayé de manière intéressante d'utiliser ce nouveau champ J de manière à obtenir une théorie dans laquelle la constante gravitationnelle de la théorie usuelle est remplacée par un champ dépendant du temps. Le versant mathématique de cette théorie a aussi été étudié indépendamment par Thiry.[§] Comme cela a été montré par Fierz,^{||} l'introduction de matière dans la théorie ajoute des hypothèses supplémentaires, sans lesquelles la dépendance temporelle des longueurs standard déduites des dimensions atomiques et des actions gravitationnelles entre particules matérielles ne sont pas encore définies. Nous n'entrerons pas ici dans une discussion sur l'importance des preuves empiriques de cette théorie.

Une autre généralisation fondamentale du formalisme de Kaluza consiste à abandonner la condition (23.9) de cylindricité. Déjà dans ses premiers articles de 1926, Klein a discuté *une dépendance périodique de toutes les variables de champ en fonction de x^5* . En normalisant la période à 2π , *cette hypothèse I* (« toutes les composantes $\gamma_{\mu\nu}$ sont des fonctions périodiques de x^5 avec une période 2π ») peut aussi être exprimée par une décomposition de Fourier

$$\gamma_{\mu\nu}(x^5, x^i) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_{\mu\nu}^{(n)}(x^i) e^{inx^5}, \quad (23.27)$$

avec la condition usuelle de réalité

$$\gamma_{\mu\nu}^{(-n)} = (\gamma_{\mu\nu}^{(n)})^*. \quad (23.27a)$$

On peut interpréter géométriquement x^5 comme une variable angulaire, de sorte que toutes les valeurs de x^5 qui diffèrent par un multiple entier de 2π correspondent au même point de l'espace-temps penta-dimensionnel si les valeurs des x^i sont les mêmes. De cette seule hypothèse, on ne peut pas déduire l'existence d'une géodésique fermée sans introduire de discontinuité de direction. Einstein et Bergmann[¶] ont étudié plus particulièrement les conséquences de l'hypothèse additionnelle II : en chaque point de l'espace penta-dimensionnel

[†]P. Jordan, *Schwerkraft und Weltall* (2ème édition, 1955). Il a formulé sa théorie originale sous la forme projective.

[‡]P.A.M. Dirac, *Nature, Lond.*, **139** (1937) 323; *Proc. Roy. Soc.* **A165** (1938)n 199.

[§]Y.R. Thiry, *Thèse*, (Paris 1951); cf. aussi A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme* (Paris 1955).

^{||}*Helv. Phys. Acta*, **29** (1956) 128.

[¶]A. Einstein and P.G. Bergmann, *Ann. Math. Princeton*, **39** (1938) 683; aussi A. Einstein,

il passe exactement une géodésique qui revient au même point avec une direction continue. Ils ont montré que dans ce cas là il existe toujours un système p. 232 de coordonnées particulier dans lequel

$$\gamma_{55} = 1, \quad \frac{\partial \gamma_{5i}}{\partial x^5} = 0. \quad (23.28)$$

Le groupe de transformation reste le même que dans le formalisme original de Kaluza [voir (23.15), (23.16)], mais les g_{ik} dépendent maintenant périodiquement de x^5 .

Les auteurs ont ensuite établi l'invariant le plus général compatible avec le groupe de transformation en question et satisfaisant la même condition générale par rapport à l'ordre de différentiation qu'en relativité générale ordinaire (c'est-à-dire linéarité dans les dérivées secondes du champ sans dérivées d'ordre supérieur). Les équations du champ correspondantes sont en général des équations intégral-différentielles.

Alors qu'avec ces hypothèses on n'a aucune interprétation ou justification du choix particulier de P comme scalaire dans le principe d'action, la situation est modifiée fondamentalement si l'on retient l'hypothèse I et qu'on abandonne l'hypothèse II. Le groupe de transformation est alors

$$x'^5 = x^5 + p(x^5, x^k), \quad x'^i = p^i(x^5, x^k) \quad (23.29)$$

où les p^i sont des fonctions périodiques arbitraires de x^5 avec une période 2π . Ce groupe général a aussi été étudié par Klein, mais ses conséquences mathématiques et physiques nécessitent davantage d'investigations.

Il est vrai que le seul scalaire construit à partir de $\gamma_{\mu\nu}$ par le processus habituel de différentiation seule (avec les restrictions usuelles en relativité générale concernant l'ordre de différentiation) est maintenant le scalaire de courbure P de la métrique penta-dimensionnelle. Mais c'est encore un problème non résolu que de savoir s'il existe d'autres invariants scalaires en général, qui pourraient être exprimés comme des intégrales le long de courbes fermées convenablement choisies et pourraient aussi être utilisées dans le principe d'action.[†]

À côté de ce problème mathématique général, il y a l'autre problème difficile de l'interprétation physique de fonctions générales périodiques en x^5 comme donné en (23.27). Cela conduit à la mécanique ondulatoire et par conséquent aussi au problème de la quantification des champs.[‡] Des tenseurs tels que $\gamma_{\mu\nu}^{(n)}(x^i)$ correspondent à un spin 2, qui d'ailleurs n'a jamais été observée dans la nature^[34], valeur à partir de laquelle la valeur observée du spin $\frac{1}{2}$ ne peut jamais être obtenue par composition. [C'est pas vrai ça !!]

De notre point de vue (voir l'introduction de cette note) il est donc clair qu'à côté du champ $\gamma_{\mu\nu}(x^5, x^i)$ il doit y avoir d'autres champs de type méca-

V. Bargmann et P.G. Bergmann, *Th. Kármán Anniversary Volume* (Pasadena 1941), p. 212 et Bergmann, note de bas de page ‡, *ibid.*, p. 227XXXXXX

[†]Le Dr. P. Bergmann a gentiment attiré mon attention sur le problème de savoir si dans une variété à cinq dimensions ayant la topologie d'un cylindre d'extension infinie dans l'espace décrit par les coordonnées $x^1, \dots, x^4$ et avec une métrique satisfaisant l'hypothèse I, il existe toujours un système de coordonnées particulier pour lequel

$$\partial \gamma_{\mu 5} / \partial x^5 = 0, \quad \text{pour } \mu = 1, \dots, 5.$$

[‡]Voir note de bas de page ‡, p. 224XXXX.

^[34] On peut considérer que l'observation des ondes gravitationnelles en 2015 répond à cette question de la preuve expérimentale comme la version ondulatoire, classique, de l'existence de particules de spin 2.

nique ondulatoire comme par exemple les champs de spineurs décrivant des particules de faibles masses.^{||}

La question de savoir si le formalisme de Kaluza a un quelconque destin en physique conduit ainsi au problème irrésolu le plus général en physique de l'accomplissement d'une synthèse entre la théorie de la relativité générale et la mécanique quantique.^[35]

^[35] On peut voir dans ce commentaire un point de vue visionnaire de la part de Pauli, puisque les théories des cordes visent précisément à une telle synthèse et passent pour cela par des formulations multi-dimensionnelles (en dimension 10, voire 11 dimensions pour la théorie M).

^{||} Voir note de bas de page †, p. 228XXXX, O. Klein, *ibid.*.