

Notes sur *Électron et Gravitation* [1]

La théorie à deux composantes

§1. La loi de transformation de ψ

Afin d'être raccord avec les écritures modernes, je vais écrire x^α ($\alpha = 0, 1, 2, 3$) les coordonnées projectives de $\mathbb{R}^3$. Chaque point $P = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ est représenté par l'ensemble des quadruplets $(x^\alpha) \in \mathbb{R}^4$ avec $x^1 = x^0 x$, $x^2 = x^0 y$, et $x^3 = x^0 z$.

En multipliant par x^0 l'équation cartésienne $-1 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$ de la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$ (muni de sa structure euclidienne canonique), on obtient la formule (1) de l'article de Weyl. À présent, si $P(x, y, z)$ est un point de la sphère unité distinct du pôle sud $(0, 0, -1)$ alors sa projection stéréographique issue du pôle sud dans le plan équatorial (assimilé à $\mathbb{C}$) est le point d'affixe

$$\frac{x}{1+z} + i \frac{y}{1+z} = \frac{\psi_2}{\psi_1},$$

où ψ_1 et ψ_2 sont deux nombres complexes dont seul le rapport est déterminé. On a alors

$$\frac{x}{1+z} = \Re\left(\frac{\psi_2}{\psi_1}\right) = \frac{\bar{\psi}_1 \psi_2 + \bar{\psi}_2 \psi_1}{2|\psi_1|^2} \quad \text{et} \quad \frac{y}{1+z} = \Im\left(\frac{\psi_2}{\psi_1}\right) = \frac{\bar{\psi}_1 \psi_2 - \bar{\psi}_2 \psi_1}{2i|\psi_1|^2}.$$

Puisque P appartient à la sphère unité, nous avons par ailleurs

$$0 = -1 + x^2 + y^2 + z^2 = -1 + \left|\frac{\psi_2}{\psi_1}\right|^2 (1+z)^2 + z^2 = (1+z) \left(\left|\frac{\psi_2}{\psi_1}\right|^2 (1+z) + z - 1 \right).$$

Puis, P étant distinct du pôle sud :

$$\left|\frac{\psi_2}{\psi_1}\right|^2 (1+z) + z - 1 = 0 \implies z = \frac{|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2}{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2}.$$

Il vient alors

$$x = \frac{\bar{\psi}_1 \psi_2 + \bar{\psi}_2 \psi_1}{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2} \quad \text{et} \quad y = i \frac{-\bar{\psi}_1 \psi_2 + \bar{\psi}_2 \psi_1}{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2}.$$

On peut donc poser

$$\begin{aligned} x^0 &= \bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2, & x^1 &= \bar{\psi}_1 \psi_2 + \bar{\psi}_2 \psi_1, \\ x^2 &= i(-\bar{\psi}_1 \psi_2 + \bar{\psi}_2 \psi_1), & x^3 &= \bar{\psi}_1 \psi_1 - \bar{\psi}_2 \psi_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Le dernier « i » dans l'équation (2) de l'article de Weyl est de trop (sinon cela voudrait dire que x^3 est imaginaire pur). Les x^α peuvent clairement être vus comme des formes hermitiennes en les ψ_1, ψ_2 . D'ailleurs, en introduisant le vecteur colonne

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

on constate que chaque x^α est associé à la matrice hermitienne S^α où

$$S^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2, \quad S^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

à travers la relation ¹

$$x^\alpha = \psi^\dagger S^\alpha \psi.$$

Les matrices S^1, S^2, S^3 sont les matrices de Pauli. Elles vérifient

$$(S^i)^2 = I_2 \quad \text{et} \quad S^i S^j = i \varepsilon_{ijk} S^k \quad (i, j, k = 1, 2, 3, j \neq i).$$

Il faut comprendre dans la deuxième égalité ci-dessus qu'il y a une sommation implicite sur l'indice k (ce sera toujours vrai : sauf indication du contraire, un indice apparaissant exactement deux fois dans un même terme sera implicitement sommé). En assimilant les x^α à des coordonnées dans l'espace-temps de Minkowski (E, g) rapportées à une base orthonormée directe (ou tétrade) $(\mathbf{e}_\alpha)$ ² alors on vient de montrer qu'à tout élément ψ de $\mathbb{C}^2$ correspond un vecteur lumière.

Soit $\mathcal{H}: E \longrightarrow \text{Herm}(2, \mathbb{C})$ l'application qui associe à tout quadrivecteur $\mathbf{x} = x^\alpha \mathbf{e}_\alpha \in E$ la matrice hermitienne $[2, 3]$

$$H = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - i x^2 \\ x^1 + i x^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} = x^\alpha S^\alpha.$$

L'application $\mathcal{H}$ est clairement un isomorphisme de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels puisqu'elle se contente d'identifier les décompositions des éléments de E dans la base $(\mathbf{e}_\alpha)$ et celles des éléments de $\text{Herm}(2, \mathbb{C})$ dans la base (S^α) . Notons que l'on a la relation bien utile [3]

$$x^\alpha = \frac{1}{2} \text{tr}(H S^\alpha),$$

ainsi que

$$\det H = -\eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = -g(\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

Autrement dit, la norme minkowskienne de $\mathbf{x}$ est au signe près le déterminant de H . L'isomorphisme $\mathcal{H}$ n'est bien entendu pas canonique puisqu'il dépend de la tétrade $(\mathbf{e}_\alpha)$ choisie. Un autre choix de tétrade $(\mathbf{e}'_\alpha)$ définit de la même façon un autre isomorphisme $\mathcal{H}': E \longrightarrow \text{Herm}(2, \mathbb{C})$ à travers $\mathbf{x} = x^\alpha \mathbf{e}'_\alpha \longmapsto H' = x^\alpha S^\alpha$. Il existe une unique transformation de Lorentz restreinte $\mathcal{L}$ menant $(\mathbf{e}'_\alpha)$ en $(\mathbf{e}_\alpha)$. Elle est représentée dans la base $(\mathbf{e}'_\alpha)$ (et aussi dans la base $(\mathbf{e}_\alpha)$) ³ par une certaine matrice $\Lambda = (\Lambda^\alpha_\beta)_{\alpha\beta} \in \text{SO}_0(3, 1)$ qui porte en colonnes les coordonnées de $(\mathbf{e}_\alpha)$ dans $(\mathbf{e}'_\alpha)$:

$$\mathbf{e}_\beta = \mathcal{L}(\mathbf{e}'_\beta) = \Lambda^\alpha_\beta \mathbf{e}'_\alpha \quad (\text{condensable en } \mathbf{e} = \mathbf{e}' \cdot \Lambda)$$

1. Nous utiliserons le « $\dagger$ » pour symboliser la conjugaison hermitique : si $X = (x_{ij})_{ij}$ alors $X^\dagger = (\bar{x}_{ji})_{ij}$.

2. Autrement dit $(\mathbf{e}_\alpha)$ est une base conditionnée par $g(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) = \eta_{\alpha\beta}$ et $\varepsilon(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1$ où $(\eta_{\alpha\beta})_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ et où ε est le tenseur de Levi-Civita orientant l'espace. Cela revient également à dire que $(\mathbf{e}_\alpha)$ est une base orthonormée telle que $\mathbf{e}_0$ est orienté vers le futur tandis que $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est spatialement directe.

3. Soient f un automorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E , $\mathcal{B}'$ la base image de $\mathcal{B}$ par f , et A (resp. A') la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$). Les deux matrices sont liées par $A' = P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage portant en colonne les coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs de $\mathcal{B}'$, ce qui n'est rien d'autre que la matrice A . Bref, on a $A' = A^{-1}AA = A$. En résumé, f est représenté par les mêmes matrices dans une base et son image.

Les coordonnées (x^α) et $(x^{\alpha'})$ de $\mathbf{x}$ sont alors liées par

$$x^{\alpha'} = \Lambda^\alpha_{\beta'} x^\beta \quad (\text{condensable en } x' = \Lambda \cdot x)$$

Nous dirons que $\mathcal{L}$ réalise la rotation $(\mathbf{e}'_\alpha) \rightarrow (\mathbf{e}_\alpha)$. Par définition d'une transformation de Lorentz⁴, on a $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ donc $(\eta^{-1} \Lambda^T \eta) \Lambda = 1$ et par suite $\Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^T \eta$ qui est la matrice représentative (dans $(\mathbf{e}_\alpha)$ ou dans $(\mathbf{e}'_\alpha)$) de la rotation inverse $\mathcal{L}^{-1}$. Cette dernière relation peut s'écrire

$$(\Lambda^{-1})^\alpha_{\beta'} = \eta^{\alpha\gamma} \Lambda^\delta_{\gamma'} \eta_{\delta\beta'} = \Lambda_\beta^\alpha$$

par la règle de montée et descente des indices via la contraction métrique. Nous obtenons donc les relations complémentaires

$$\mathbf{e}'_\beta = \mathcal{L}^{-1}(\mathbf{e}_\beta) = \Lambda_\beta^\alpha \mathbf{e}_\alpha \quad \text{et} \quad x^\alpha = \Lambda_\beta^\alpha x^{\beta'}.$$

Au niveau de la matrice hermitienne représentant $\mathbf{x}$, le changement de tétrade opère la transformation

$$H = x^\alpha S^\alpha \longrightarrow H' = x^{\alpha'} S^\alpha = \Lambda_\beta^\alpha x^{\beta'} S^\alpha.$$

Soit, pour toute matrice 2×2 complexe A , la transformation linéaire $\Phi_A: \psi \mapsto \psi' = A\psi$ qui s'accompagne naturellement d'une transformation des coordonnées :

$$x^\alpha \longrightarrow x^{\alpha'} = \psi'^\dagger S^\alpha \psi' = \psi^\dagger (A^\dagger S^\alpha A) \psi.$$

Comme $A^\dagger S^\alpha A$ est une matrice hermitienne, on a

$$A^\dagger S^\alpha A = L^\alpha_{\beta'}(A) S^{\beta'} \quad \text{avec} \quad L^\alpha_{\beta'}(A) = \frac{1}{2} \text{tr}(A^\dagger S^\alpha A S^{\beta'}) \in \mathbb{R}.$$

La transformation des coordonnées est donc linéaire et s'écrit

$$x^\alpha \longrightarrow x^{\alpha'} = L^\alpha_{\beta'}(A) x^{\beta'}.$$

Nous avons en outre

$$x^{\alpha'} = \frac{1}{2} \text{tr}(A^\dagger S^\alpha A x^{\beta'} S^{\beta'}) = \frac{1}{2} \text{tr}(A^\dagger S^\alpha A H) = \frac{1}{2} \text{tr}((A H A^\dagger) S^\alpha).$$

La transformation des coordonnées peut donc être comprise comme la transformation

$$H = x^\alpha S^\alpha \longrightarrow H' = x^{\alpha'} S^\alpha = A H A^\dagger$$

de $\text{Herm}(2, \mathbb{C})$ dans lui-même. On a $\det H' = |\det A|^2 \det H$ donc la transformation des coordonnées est une transformation de Lorentz (passive) si et seulement si A est de déterminant un nombre de module 1.

L'application L qui associe à toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ la matrice $L(A) = (L^\alpha_{\beta'}(A))_{\alpha\beta'}$ des coordonnées est un morphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ vis-à-vis des produits matriciels. En effet, si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ alors le produit AB engendre

$$\psi \longrightarrow \Phi_{AB}(\psi) = (AB) \cdot \psi = A \cdot (B \cdot \psi) = (\Phi_A \circ \Phi_B)(\psi).$$

4. Une transformation de Lorentz étant une isométrie, on a $g(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) = g(\mathbf{e}'_\alpha, \mathbf{e}'_\beta)$ donc

$$\eta_{\alpha\beta} = g(\Lambda^\gamma_\alpha \mathbf{e}_\gamma, \Lambda^\delta_\beta \mathbf{e}_\delta) = \Lambda^\gamma_\alpha \Lambda^\delta_\beta \eta_{\gamma\delta} = (\Lambda^T)^\alpha_{\gamma'} \eta_{\gamma'\delta} \Lambda^\delta_{\beta'} = [\Lambda^T \eta \Lambda]_{\alpha\beta'}.$$

D'où la transformation $x \longrightarrow x \cdot L(A)L(B)$ de laquelle on déduit $L(AB) = L(A)L(B)$ ⁵ : $L(AB) = L(A)L(B)$. Le morphisme L n'est pas injectif puisque $L(uA) = L(A)$ pour tout nombre complexe u de module 1. Il n'est pas non plus surjectif puisque si on pose

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1)$$

alors on a

$$L(A)^0_0 = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A^\dagger A) = \frac{1}{2} (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2) \geq 0.$$

Cherchons le noyau de L . Il est d'abord clair que $I_2 \in \ker(L)$. Par conséquent : $\{uI_2 \mid u \in \mathbb{U}\} \subseteq \ker(L)$. Réciproquement, supposons que A appartienne au noyau de L . Nous avons donc

$$L^\alpha_\beta(A) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A^\dagger S^\alpha A S^\beta) = \delta^\alpha_\beta.$$

En posant A comme dans (1) et en ne considérant que les trois cas $\alpha = \beta = 1$, $\alpha = \beta = 3$ et $\alpha = \beta = 0$, on obtient le système

$$\begin{cases} \Re(\bar{a}d + b\bar{c}) &= 1 \\ |a|^2 - |b|^2 - |c|^2 + |d|^2 &= 2 \\ |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 &= 2 \end{cases}.$$

Des deux dernières lignes on tire $b = c = 0$ et $|a|^2 + |d|^2 = 2$ tandis que la première se réduit à $\Re(\bar{a}d) = 1$. Il vient alors

$$|a - d|^2 = |a|^2 + |d|^2 - 2\Re(\bar{a}d) = 0 \implies a = d.$$

Bref, A est de la forme uI_2 avec u un nombre complexe de module 1. En résumé : $\ker(L) = \{uI_2 \mid u \in \mathbb{U}\}$.

Pour que $L(A)$ soit une transformation de Lorentz, il faut et il suffit que A ait pour déterminant un nombre complexe de module 1. Pour cette raison, nous allons nous restreindre à l'ensemble des matrices 2×2 complexes de déterminant un nombre de module 1. Il forme un groupe pour le produit matriciel que nous noterons $GL(2, \mathbb{C})^\circ$. Il est clair que l'application

$$\begin{aligned} U(1) \times SL(2, \mathbb{C}) &\longrightarrow GL(2, \mathbb{C})^\circ \\ (u, S) &\longmapsto uS \end{aligned}$$

est un morphisme continu et surjectif. Ainsi, $U(1)$ et $SL(2, \mathbb{C})$ étant connexes, $GL(2, \mathbb{C})^\circ$ l'est également. Par continuité de L , l'image de $GL(2, \mathbb{C})^\circ$ par L est connexe et contient I_4 donc $L(GL(2, \mathbb{C})^\circ) \subseteq SO_0(3, 1)$. Toute matrice A complexe 2×2 dont le déterminant

5. On peut aussi le vérifier de façon plus calculatoire en utilisant l'identité [3]

$$\operatorname{tr}(AS^\alpha) \operatorname{tr}(BS^\alpha) = 2 \operatorname{tr}(AB)$$

valant pour toutes matrices 2×2 complexes A et B . Elle permet d'écrire

$$\begin{aligned} L^\alpha_\gamma(A) L^\gamma_\beta(B) &= \frac{1}{4} \operatorname{tr}(A^\dagger S^\alpha A S^\gamma) \operatorname{tr}(B^\dagger S^\gamma B S^\beta) = \frac{1}{4} \operatorname{tr}(A^\dagger S^\alpha A S^\gamma) \operatorname{tr}(B S^\beta B^\dagger S^\gamma) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A^\dagger S^\alpha A B S^\beta B^\dagger) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}((AB)^\dagger S^\alpha (AB) S^\beta) = L^\alpha_\beta(AB). \end{aligned}$$

est de module 1 définit donc une transformation de Lorentz propre et orthochrone. Nous noterons Λ la restriction de L à $GL(2, \mathbb{C})^\circ$. On a alors toujours $\Lambda(A)_0^0 \geq 1$ et $\det \Lambda(A) = 1$.

Afin de ne pas se départir de l'usage moderne, on ne remplacera pas x^0 par $i x^0$. De fait, il est inutile d'introduire la notation $x(\alpha)$. Les x^α seront des coordonnées dans une tétrade orthonormée (e_α) . La rotation infinitésimale $\mathcal{L}$ d'une tétrade (e'_α) la menant en (e_α) prend la forme $e' \rightarrow e = e' \cdot \Lambda$ avec $\Lambda = 1 + d\Omega$ où $d\Omega$ est une matrice infinitésimale $d\Omega = (d\omega^\alpha_\beta)_{\alpha\beta}$ devant vérifier la condition nécessaire et suffisante

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \iff (\delta^\mu_\alpha + d\omega^\mu_\alpha) \eta_{\mu\nu} (\delta^\nu_\beta + d\omega^\nu_\beta) = \eta_{\alpha\beta} \iff d\omega_{\alpha\beta} = -d\omega_{\beta\alpha}.$$

Sous une telle transformation, on a

$$x^\alpha \longrightarrow x^{\alpha'} = x^\alpha + dx^\alpha \quad \text{avec} \quad dx^\alpha = d\omega^\alpha_\beta x^\beta.$$

Cela revient à $H \longrightarrow H + dH$ avec

$$dH = \begin{pmatrix} dx^0 + dx^3 & dx^1 - i dx^2 \\ dx^1 + i dx^2 & dx^0 - dx^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\omega^0_\alpha + d\omega^3_\alpha & d\omega^1_\alpha - i d\omega^2_\alpha \\ d\omega^1_\alpha + i d\omega^2_\alpha & d\omega^0_\alpha - d\omega^3_\alpha \end{pmatrix} x^\alpha.$$

Cette transformation est engendrée par une certaine transformation infinitésimale Φ_A des spineurs avec $A = 1 + d\Sigma \in GL(2, \mathbb{C})^\circ$ une matrice pouvant être prise dans $SL(2, \mathbb{C})$, $d\Sigma$ étant une matrice infinitésimale. On a alors $d\Sigma$ qui est une de trace nulle (un élément de l'algèbre de Lie de $SL(2, \mathbb{C})$). D'où la transformation

$$\psi \longrightarrow \psi' = \psi + d\psi \quad \text{avec} \quad d\psi = d\Sigma \cdot \psi.$$

La matrice $d\Sigma$ recherchée est celle pour laquelle, au premier ordre :

$$(I_2 + d\Sigma)H(I_2 + d\Sigma)^\dagger = H + dH \iff d\Sigma H + (d\Sigma H)^\dagger = dH.$$

Cette dernière égalité est à comprendre comme une équation à six inconnues réelles (les parties réelles et imaginaires des éléments de $d\Sigma$ sachant que sa trace est nulle) devant être vérifiée pour tout H , c'est-à-dire pour tous x^0, x^1, x^2, x^3 . En utilisant le fait que $d\omega^0_i = d\omega^i_0 = -d\omega_{0i}$ et que $d\omega^i_j = d\omega_{ij}$ on obtient sans difficulté

$$d\Sigma = \frac{1}{2} \left((d\omega_{10} + i d\omega_{23}) S^1 + (d\omega_{20} + i d\omega_{31}) S^2 + (d\omega_{30} + i d\omega_{12}) S^3 \right) = \frac{1}{2} d\omega_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta}$$

où les $S^{\alpha\beta}$ sont les matrices 2×2 complexes données par

$$S^{j0} = S^j = -\frac{1}{2} S^{0j} \quad , \quad S^{ij} = \frac{i}{2} \varepsilon_{ijk} S^k.$$

Cela revient à

$$S^{j\alpha} = \frac{1}{2} S^j S^\alpha \quad (j \neq \alpha) \quad , \quad S^{\alpha\beta} = -S^{\beta\alpha}.$$

En définitive, la rotation $\mathcal{L}^{-1}$ de la tétrade opère les transformations suivantes⁶ :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\beta &\longrightarrow \mathbf{e}'_\beta = \mathbf{e}_\beta + d\mathbf{e}_\beta = \mathbf{e}_\beta + d\omega_\beta^\alpha \mathbf{e}_\alpha \quad (\text{condensable en } \mathbf{e}' = \mathbf{e} \cdot (1 - d\Omega); d\mathbf{e} = -\mathbf{e} \cdot d\Omega) \\ x^\alpha &\longrightarrow x'^\alpha = x^\alpha + dx^\alpha = x^\alpha + d\omega_\beta^\alpha x^\beta \quad (\text{condensable en } x' = (1 + d\Omega) \cdot x; dx = d\Omega \cdot x) \\ \psi &\longrightarrow \psi' = \psi + d\psi = \psi + d\Sigma \cdot \psi = \psi + \frac{1}{2} d\omega_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} \cdot \psi \end{aligned}$$

§2. Métrique et déplacement parallèle

Se donner la métrique en un point P revient à se donner la classe des tétrades équivalentes au sens où elles sont liées deux-à-deux par une transformation Λ . Les lois de la physique devront être invariantes par changement d'un représentant de cette classe, ce changement dépendant du point considéré. Un vecteur en P peut se décomposer dans la tétrade choisie au point P :

$$\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{e}_\alpha.$$

Avec Weyl, nous allons désigner par des indices latins $p, q, \dots$ les coordonnées d'un point dans l'espace-temps. Les lois devront évidemment être indépendantes du choix de telles coordonnées. Le vecteur $\mathbf{v}$ se décompose dans une base naturelle $(\mathbf{e}_p) = (\partial_p)$ selon

$$\mathbf{v} = v^p \mathbf{e}_p.$$

En particulier, chaque vecteur de la tétrade s'écrit

$$\mathbf{e}_\alpha = e_\alpha^p \mathbf{e}_p.$$

Les coordonnées de $\mathbf{v}$ dans $(\mathbf{e}_\alpha)$ et $(\mathbf{e}_p)$ sont évidemment liées par

$$v^p = e_\alpha^p v^\alpha.$$

Réciproquement, chaque vecteur $\mathbf{e}_p$ admet dans $(\mathbf{e}_\alpha)$ une décomposition que l'on notera

$$\mathbf{e}_p = e_p^\alpha \mathbf{e}_\alpha$$

et on a les relations

$$e_p^\alpha e_\beta^p = \delta_\beta^\alpha, \quad e_p^\alpha e_\alpha^q = \delta_p^q.$$

De plus :

$$v^\alpha = e_p^\alpha v^p.$$

Pour des 1-formes A nous aurons des relations similaires :

$$A_p = e_p^\alpha A_\alpha, \quad A_\alpha = e_\alpha^p A_p.$$

6. Puisque $(1 + d\Omega)(1 - d\Omega) = 1 - (d\Omega)^2$ il est clair que $1 - d\Omega$ est l'inverse de $1 + d\Omega$ à l'ordre considéré. Par ailleurs, comme la matrice unité $(\delta_\beta^\alpha)_{\alpha\beta}$ est une matrice de rotation particulière, et qu'elle est son propre inverse, on a $(\delta_\beta^\alpha)_{\alpha\beta} = (\delta_\beta^\alpha)_{\alpha\beta}$ donc $\delta_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha$ et on vérifie que

$$d\omega_\beta^\alpha = \eta^{\mu\alpha} d\omega_{\beta\mu} = -\eta^{\mu\alpha} d\omega_{\mu\beta} = -d\omega_\beta^\alpha.$$

D'où :

$$\delta_\beta^\alpha + d\omega_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha - d\omega_\beta^\alpha = (1 - d\Omega)^\alpha_\beta = [(1 + d\Omega)^{-1}]^\alpha_\beta.$$

Tout ceci démontre la cohérence de la notation employée.

Plus généralement pour un tenseur quelconque, les e_p^α et les e_α^p servent à « transformer un indice de tétrade en un indice naturel et *vice versa* » selon que l'indice est covariant ou contravariant.

En appliquant la loi de changement de base au tenseur métrique, on a

$$g_{pq} = \eta_{\alpha\beta} e_p^\alpha e_q^\beta, \quad \eta_{\alpha\beta} = g_{pq} e_\alpha^p e_\beta^q,$$

et

$$g^{pq} = \eta^{\alpha\beta} e_\alpha^p e_\beta^q, \quad \eta^{\alpha\beta} = g^{pq} e_p^\alpha e_q^\beta.$$

En notant $G = (g_{pq})$ la matrice des composantes de la métrique et en introduisant la matrice de changement de base $E = (e_\alpha^p)$, l'égalité de gauche ci-dessus s'écrit matriciellement $G^{-1} = E^T \eta E$. En notant g le déterminant de G et ε celui de E nous avons donc

$$g^{-1} = \det G^{-1} = -\varepsilon^2.$$

D'où : $\varepsilon = \sqrt{-g}$. Par conséquent, si $T = (T^{p\dots}_{q\dots})$ est un tenseur alors les

$$\mathfrak{T}^{p\dots}_{q\dots} = \frac{1}{\varepsilon} T^{p\dots}_{q\dots}$$

sont les composantes, dans la base naturelle ($\mathbf{e}_p$), d'une densité tensorielle $\mathfrak{T}$ que l'on reconnaît par l'emploi d'une lettre gothique. Comme d'habitude, on monte et descend les indices par contraction avec le tenseur métrique (que ce soit pour changer la variance d'un tenseur par dualité métrique ou simplement pour l'utilité formelle⁷). Les indices latins $p, q, \dots$ se référant à la base naturelle, leur montée ou leur descente fait apparaître les g^{pq} ou les g_{pq} , tandis que les indices grecs $\alpha, \beta, \dots$ se référant à la tétrade, le même jeu s'effectue avec les $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$ ou les $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ (sachant que l'on a l'égalité numérique $\eta_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$). Par exemple, on pourra écrire

$$g_{pq} = (\eta_{\alpha\beta} e_p^\alpha) e_q^\beta = e_{\beta p} e_q^\beta = e_{\alpha p} e_q^\alpha.$$

Cette relation fait parfois dire que les composantes de la tétrade constituent la « racine carrée » de la métrique.

Rapportons-nous à un système de coordonnées et à sa base naturelle associée. Un vecteur $\mathbf{v}(P) = (v^p)$ au point P , lorsqu'on le transporte parallèlement (vis-à-vis d'une connexion linéaire quelconque a priori) à un point infiniment voisin P' , devient le vecteur $\mathbf{v}^{\parallel}(P')$, la différence entre les composantes de $\mathbf{v}^{\parallel}(P')$ et celles de $\mathbf{v}(P)$ se déduisant par une transformation linéaire infinitésimale de ces dernières :

$$v^p + \delta_{\parallel} v^p \quad \text{avec} \quad \delta_{\parallel} v^p = -d\Gamma^p_q v^q. \quad (2)$$

En utilisant une notation matricielle pour les composantes, nous pouvons introduire la matrice $d\Gamma = (d\Gamma^p_q)$ et écrire avec Weyl : $\delta_{\parallel} v = -d\Gamma \cdot v$. De plus, les $d\Gamma^p_q$ sont supposés dépendre linéairement des composantes du déplacement, ce qui nous amène à introduire les symboles Γ^p_{qr} tels que $d\Gamma^p_q = \Gamma^p_{qr} dx^r$ où les $dx^r = x^r(P') - x^r(P)$ sont les composantes du déplacement PP' .

7. Ceci explique les notations e_α^p et e_p^α employées. Plus généralement, considérons deux champs de bases ($\mathbf{e}_\mu$) et ($\mathbf{e}_{\mu'}$) de quelque nature que ce soit. Notons $P = (P^{\mu'}_{\nu})_{\mu\nu}$ la matrice de passage de l'une à l'autre de sorte que $\mathbf{e}_\nu = P^{\mu'}_{\nu} \mathbf{e}_{\mu'}$. Son inverse $Q = (Q^{\mu}_{\nu'})_{\mu\nu'}$ est telle que $\mathbf{e}_{\nu'} = Q^{\mu}_{\nu'} \mathbf{e}_\mu$. Nous avons $g_{\mu\nu} = P^{\rho'}_{\mu} P^{\sigma'}_{\nu} g_{\rho'\sigma'}$ donc $\delta^\tau_{\mu} = P^{\rho'}_{\mu} (P^{\sigma'}_{\nu} g_{\rho'\sigma'} g^{\nu\tau})$ ce qui implique $Q^\tau_{\rho'} = P^{\sigma'}_{\nu} g_{\rho'\sigma'} g^{\nu\tau} = P^{\sigma'}_{\rho'} g^{\sigma\tau}$ par le jeu de la montée et de la descente d'indice.

C'est la façon « old school » de définir le transport parallèle et d'introduire les symboles de connexion Γ^p_{qr} [4, 5]. Ceux-ci sont censés dépendre de façon lisse de la position, ce qui fait que dans l'écriture $\Gamma^p_{qr} dx^r$ il n'est nul besoin de préciser le point où est évalué Γ^p_{qr} puisque ce peut aussi bien être en P ou en P' vu qu'on se limite au premier ordre en le déplacement. La nature des symboles Γ^p_{qr} , c'est-à-dire leur loi de transformation d'un système de coordonnées à un autre, se déduit du principe de cohérence selon lequel la définition de $\mathbf{v}^{\parallel}(P')$ à partir de (2) ne dépend pas du système de coordonnées choisi. Retrouvons cette loi. Pour cela, donnons-nous un autre système de coordonnées $(x^{p'})$ dans lequel $\mathbf{v}(P)$ a pour composantes $v^{p'}$. Le vecteur $\mathbf{v}^{\parallel}(P')$ devra quant à lui avoir pour composantes

$$v^{p'} + \delta_{\parallel} v^{p'} = \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^a}(P')(v^a + \delta_{\parallel} v^a) \quad \text{avec} \quad \delta_{\parallel} v^{p'} = -\Gamma^{p'}_{q'r'} v^{q'} dx^{r'}, \quad dx^{r'} = x^{r'}(P') - x^{r'}(P).$$

Explicitement, on a

$$v^{p'} - \Gamma^{p'}_{q'r'} v^{q'} dx^{r'} = \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^a}(P')(v^a - \Gamma^a_{bc} v^b dx^c),$$

c'est-à-dire

$$\Gamma^{p'}_{q'r'} v^{q'} dx^{r'} = v^{p'} + \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^a}(P')(\Gamma^a_{bc} v^b dx^c - v^a).$$

En se limitant au premier ordre dans le déplacement, on peut écrire

$$\Gamma^{p'}_{q'r'} v^{q'} dx^{r'} = v^{p'} + \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^a} \Gamma^a_{bc} v^b dx^c - \left(\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^a}(P) + \frac{\partial^2 x^{p'}}{\partial x^a \partial x^b} dx^b \right) v^a.$$

D'où :

$$\Gamma^{p'}_{q'r'} v^{q'} dx^{r'} = \left(\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^a} \Gamma^a_{bc} - \frac{\partial^2 x^{p'}}{\partial x^b \partial x^c} \right) v^b dx^c = \left(\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^a} \Gamma^a_{bc} - \frac{\partial^2 x^{p'}}{\partial x^b \partial x^c} \right) \frac{\partial x^b}{\partial x^{q'}} \frac{\partial x^c}{\partial x^{r'}} v^{q'} dx^{r'}.$$

Ceci devant être vrai pour tout vecteur $\mathbf{v}$ et tout déplacement, on en déduit

$$\Gamma^{p'}_{q'r'} = \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x^{q'}} \frac{\partial x^c}{\partial x^{r'}} \Gamma^a_{bc} - \frac{\partial x^b}{\partial x^{q'}} \frac{\partial x^c}{\partial x^{r'}} \frac{\partial^2 x^{p'}}{\partial x^b \partial x^c},$$

puis la loi de transformation recherchée :

$$\Gamma^p_{qr} \longrightarrow \Gamma^{p'}_{q'r'} = \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x^{q'}} \frac{\partial x^c}{\partial x^{r'}} \Gamma^a_{bc} + \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^a} \frac{\partial^2 x^a}{\partial x^{q'} \partial x^{r'}}.$$

Pour un déplacement donné, on aura également la loi de transformation

$$d\Gamma^p_q \longrightarrow d\Gamma^{p'}_{q'} = \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x^{q'}} d\Gamma^a_b + \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^b} \frac{\partial^2 x^a}{\partial x^{q'} \partial x^{r'}} dx^b.$$

Supposons donné (localement) un champ de vecteurs $\mathbf{v}$. Les composantes de $\mathbf{v}(P')$ diffèrent infiniment peu de celles de $\mathbf{v}(P)$:

$$v^p(P') = v^p + dv^p \quad \text{avec} \quad dv^p = \frac{\partial v^p}{\partial x^r} dx^r = \partial_r v^p dx^r.$$

Le défaut de parallélisme du champ entre les points infiniment voisins P et P' est logiquement mesuré par le vecteur infinitésimal⁸ $D\mathbf{v} = \mathbf{v}(P') - \mathbf{v}^{\parallel}(P')$ au point P' dont les composantes sont

$$Dv^p = (v^p + dv^p) - (v^p + \delta_{\parallel} v^p) = dv^p - \delta_{\parallel} v^p = dv^p + d\Gamma^p_q v^q = (\partial_r v^p + \Gamma^p_{qr} v^q) dx^r.$$

C'est la différentielle covariante du champ $\mathbf{v}$ selon PP' .

Lorsque la connexion est compatible avec la métrique (ce qui sera supposé dans la suite), le transport parallèle d'une tétrade $(\mathbf{e}_{\alpha}(P))$ de P jusqu'à P' est encore une tétrade $(\mathbf{e}_{\alpha}^{\parallel}(P'))$. Il existe donc une rotation infinitésimale $\mathcal{L}$ menant $(\mathbf{e}_{\alpha}^{\parallel}(P'))$ en $(\mathbf{e}_{\alpha}(P'))$ et dont la représentation dans l'une de ces bases est $1 + d\Omega$. Nous avons alors

$$D\mathbf{e}_{\alpha} = \mathbf{e}_{\alpha}(P') - \mathbf{e}_{\alpha}^{\parallel}(P') = d\omega^{\beta}_{\alpha} \mathbf{e}_{\beta}(P').$$

Cette relation peut se condenser sous la forme

$$D\mathbf{e} = \mathbf{e}(P') \cdot d\Omega \quad \text{c.-à-d.} \quad D\mathbf{e}_{\alpha} = \mathbf{e}_{\beta}(P') d\omega^{\beta}_{\alpha} \quad \text{avec} \quad d\omega^{\beta}_{\alpha} = \omega^{\beta}_{\alpha p} dx^p = \omega^{\beta}_{\alpha \gamma} w^{\gamma}$$

où nous avons introduit les composantes w^{α} dans la tétrade du vecteur infinitésimal $\mathbf{w}$ de composantes dx^p dans la base naturelle. Nous avons alors

$$(D\mathbf{e}_{\alpha})^p \mathbf{e}_p(P') = d\omega^{\beta}_{\alpha} e_{\beta}^p \mathbf{e}_p(P').$$

En identifiant :

$$(D\mathbf{e}_{\alpha})^p = de_{\alpha}^p + d\Gamma^p_q e_{\alpha}^q = d\omega^{\beta}_{\alpha} e_{\beta}^p,$$

soit :

$$\left(\frac{\partial e_{\alpha}^p}{\partial x^r} + \Gamma^p_{qr} e_{\alpha}^q \right) e_{\gamma}^r w^{\gamma} = \omega^{\beta}_{\alpha \gamma} w^{\gamma} e_{\beta}^p.$$

Ceci devant être vrai pour tout déplacement infinitésimal, on tire

$$\left(\frac{\partial e_{\alpha}^p}{\partial x^r} + \Gamma^p_{qr} e_{\alpha}^q \right) e_{\gamma}^r = \omega^{\beta}_{\alpha \gamma} e_{\beta}^p. \quad (3)$$

Dorénavant, on suppose que la connexion est celle de Levi-Civita, donc métrique et sans torsion (ou symétrique dans un système naturel) : $\Gamma^p_{qr} = \Gamma^p_{rq}$. En retranchant à (3) l'expression équivalente pour laquelle α et γ sont échangés, la symétrie ci-dessus nous apporte la relation

$$\frac{\partial e_{\alpha}^p}{\partial x^r} e_{\gamma}^r - \frac{\partial e_{\gamma}^p}{\partial x^r} e_{\alpha}^r = (\omega^{\beta}_{\alpha \gamma} - \omega^{\beta}_{\gamma \alpha}) e_{\beta}^p.$$

À gauche, on reconnaît les composantes du crochet⁹ $[\mathbf{e}_{\gamma}, \mathbf{e}_{\alpha}]$. Autrement dit, on a

$$[\mathbf{e}_{\gamma}, \mathbf{e}_{\alpha}]^p = (\omega^{\beta}_{\alpha \gamma} - \omega^{\beta}_{\gamma \alpha}) e_{\beta}^p,$$

ce qui revient à

$$[\mathbf{e}_{\gamma}, \mathbf{e}_{\alpha}]^{\beta} = \omega^{\beta}_{\alpha \gamma} - \omega^{\beta}_{\gamma \alpha} \iff [\mathbf{e}_{\gamma}, \mathbf{e}_{\alpha}]_{\beta} = \omega_{\beta \alpha \gamma} - \omega_{\beta \gamma \alpha}.$$

8. Attention, la définition adoptée par Weyl de la différentielle covariante est opposée à la nôtre, c'est : $\mathbf{v}^{\parallel}(P') - \mathbf{v}(P')$. En outre, il la note $\delta \mathbf{v}$ plutôt que $D\mathbf{v}$ comme dans ce document.

9. Attention, dans l'article de Weyl, le crochet est défini comme l'opposé de la convention aujourd'hui standard à laquelle on se tient dans ce document.

Les $d\omega_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta\gamma}v^\gamma$ sont antisymétriques sous l'échange de α et β quel que soit notre choix de déplacement donc on a $\omega_{\alpha\beta\gamma} = -\omega_{\beta\alpha\gamma}$. De fait, en combinant la dernière expression avec les expressions équivalentes obtenues en permutant cycliquement α, β, γ selon la procédure habituelle, on obtient

$$\omega_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left([\mathbf{e}_\gamma, \mathbf{e}_\beta]_\alpha - [\mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\alpha]_\gamma + [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\gamma]_\beta \right).$$

On vérifie bien que cette expression est antisymétrique sous l'échange de γ et α . Ajoutons que, par construction, le transport parallèle de P à P' est en soi une application linéaire de l'espace vectoriel tangent en P vers l'espace vectoriel tangent en P' qui envoie $\mathbf{v}(P)$ en $\mathbf{v}^\parallel(P')$. Par linéarité, il est clair que $\mathbf{v}^\parallel(P')$ a les mêmes composantes dans $(\mathbf{e}_\alpha(P'))$ que $\mathbf{v}(P)$ dans $(\mathbf{e}_\alpha(P))$.

Avant de conclure, établissons une identité utile pour la suite en partant de

$$\omega^\beta_{\alpha\beta} = \eta^{\beta\gamma} \omega_{\gamma\alpha\beta} = [\mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\alpha]^\beta = [\mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\alpha]^p e^\beta_p = \frac{\partial e_\alpha^p}{\partial x^p} - e_\alpha^q \frac{\partial e_\beta^p}{\partial x^q} e^\beta_p = \frac{\partial e_\alpha^p}{\partial x^p} - e_\alpha^p \frac{\partial e_\beta^q}{\partial x^p} e^\beta_q.$$

Or, on a ¹⁰

$$\frac{\partial}{\partial x^p} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) = -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^p} = -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial e_\beta^q} \frac{\partial e_\beta^q}{\partial x^p} = -\frac{1}{\varepsilon} e^\beta_q \frac{\partial e_\beta^q}{\partial x^p}.$$

On en déduit :

$$\omega^\beta_{\alpha\beta} = \varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial e_\alpha^p}{\partial x^p} + \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) e_\alpha^p \right) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\frac{e_\alpha^p}{\varepsilon} \right) = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha^p}{\partial x^p}.$$

Compléments. D'après ce que nous avons vu, la différentielle covariante d'un champ de vecteurs $\mathbf{v}$ selon le vecteur $\mathbf{w} = PP'$ est le vecteur $D\mathbf{v}$ situé en P' qui évalue la différence entre $\mathbf{v}(P')$ et le vecteur obtenu en transportant parallèlement $\mathbf{v}(P)$ jusqu'en P' . Il a pour expression

$$D\mathbf{v} = (dv^p + d\Gamma^p_{qr}v^q)\mathbf{e}_p(P') = (\partial_r v^p + \Gamma^p_{qr}v^q)w^r \mathbf{e}_p(P').$$

De nos jours, on le définirait plutôt comme le vecteur situé en P qui évalue la différence entre $\mathbf{v}(P)$ et le vecteur obtenu en transportant parallèlement $\mathbf{v}(P')$ jusqu'en P . Cette définition est plus satisfaisante puisqu'elle permet d'obtenir un vecteur en P quel que soit le point P' pris dans le voisinage infinitésimal de P . Elle revient simplement à remplacer $\mathbf{e}_p(P')$ par $\mathbf{e}_p(P)$ dans l'expression ci-dessus. Aujourd'hui, on écrit donc

$$D\mathbf{v} = (dv^p + \Gamma^p_{qr}v^q)w^r \mathbf{e}_p$$

où tout est évalué en P . Toujours dans une perspective plus moderne, le vecteur $\mathbf{w}$ ne se limite pas nécessairement à être infinitésimal mais peut être plus généralement un

10. Considérons une certaine matrice $M = (m^j_k)_{jk}$ de taille $n \times n$. Son déterminant D est une fonction (évidemment différentiable) des n^2 éléments de M . Le développement de D le long de la k -ième colonne s'écrit

$$D = m^j_k \text{cof}(M)^j_k \quad (\text{pas de sommation sur } k).$$

Comme le cofacteur $\text{cof}(M)^j_k$ ne contient évidemment pas m^j_k , on a

$$\frac{\partial D}{\partial m^j_k} = \text{cof}(M)^j_k = D(M^{-1})^j_k.$$

vecteur quelconque situé en P. Nous obtenons ainsi une application linéaire $\nabla \mathbf{v}$ qui associe à tout vecteur $\mathbf{w}$ basé en P le vecteur

$$\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v} = (dv^p + \Gamma_{qr}^p v^q) w^r \mathbf{e}_p$$

basé au même point. C'est la dérivée covariante de $\mathbf{v}$ en P. Mieux, en se donnant un champ de vecteurs $\mathbf{w}$, l'expression ci-dessus peut être évaluée en tout point et définit donc un champ de vecteurs; on obtient ainsi une application $\nabla \mathbf{v}$, la dérivée covariante de $\mathbf{v}$, qui prend en entrée un champ de vecteurs $\mathbf{w}$ et renvoie en sortie un champ de vecteurs $\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v}$. Plus globalement, nous obtenons une application ∇ qui prend en entrée deux champs de vecteurs $\mathbf{w}, \mathbf{v}$ et renvoie en sortie le champ de vecteurs $\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v}$. Par linéarité, il est clair que si $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sont des champs de vecteurs et si f est un champ scalaire alors

$$\nabla_{\mathbf{w}}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \quad , \quad \nabla_{\mathbf{u} + \mathbf{w}} \mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \quad , \quad \nabla_{f\mathbf{w}} \mathbf{v} = f \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v}. \quad (4)$$

En revanche, on a

$$\nabla_{\mathbf{w}}(f\mathbf{v}) = \mathbf{w}(f)\mathbf{v} + f \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v}, \quad (5)$$

où $\mathbf{w}(f)$ est le résultat de l'action naturelle d'un champ de vecteurs $\mathbf{w}$ sur un scalaire f , à savoir le champ scalaire $w^p \partial_p f$. Ce dernier peut aussi se comprendre comme la différentielle df de f appliquée à $\mathbf{w}$, c'est-à-dire $df(\mathbf{w})$, encore noté $\langle df, \mathbf{w} \rangle$ en utilisant le crochet de dualité.

Réciproquement, si ∇ est une application prenant en entrée deux champs de vecteurs $\mathbf{w}, \mathbf{v}$ et renvoyant en sortie un champ de vecteur $\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v}$ de façon à vérifier les propriétés (4) et (5) alors elle définit un transport parallèle.

Le transport parallèle encodé par ∇ est entièrement caractérisé par la donnée des symboles Γ_{qr}^p qui sont les composantes des différentielles covariantes $\nabla_r \mathbf{e}_q$ (où ∇_r désigne $\nabla_{\mathbf{e}_r}$) car on a $\nabla_r \mathbf{e}_q = \Gamma_{qr}^p \mathbf{e}_p$. Nous noterons plus généralement $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ les symboles de ∇ vis-à-vis d'une base $(\mathbf{e}_{\mu})$ quelconque. Ils sont tels que $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{e}_{\mu} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \mathbf{e}_{\lambda}$ (où $\nabla_{\mathbf{v}} = \nabla_{\mathbf{e}_{\nu}}$). Les propriétés (4) et (5) permettent de déterminer simplement la loi de transformation de ces symboles sous un changement de champ de bases $(\mathbf{e}_{\mu}) \rightarrow (\mathbf{e}_{\mu'})$:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{v}'} \mathbf{e}_{\mu'} &= \nabla_{\mathbf{v}'} (e_{\mu'}^S \mathbf{e}_S) = \mathbf{e}_{\mathbf{v}'}(e_{\mu'}^S) \mathbf{e}_S + e_{\mu'}^S e_{\mathbf{v}'}^{\tau} \nabla_{\tau} \mathbf{e}_S \\ &= (\mathbf{e}_{\mathbf{v}'}(e_{\mu'}^S) + e_{\mu'}^S e_{\mathbf{v}'}^{\tau} \Gamma_{S\tau}^{\rho}) \mathbf{e}_{\rho} = e_{\rho}^{\lambda'} (\mathbf{e}_{\mathbf{v}'}(e_{\mu'}^{\rho}) + e_{\mu'}^S e_{\mathbf{v}'}^{\tau} \Gamma_{S\tau}^{\rho}) \mathbf{e}_{\lambda'}. \end{aligned}$$

D'où la loi de transformation

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \longrightarrow \Gamma_{\mu'\nu'}^{\lambda'} = e_{\rho}^{\lambda'} (e_{\mu'}^S e_{\nu'}^{\tau} \Gamma_{S\tau}^{\rho} + \mathbf{e}_{\mathbf{v}'}(e_{\mu'}^{\rho})).$$

Une connexion ∇ définit une courbure et une torsion qui lui sont propres. En particulier, la torsion est l'application $\mathcal{T}$ qui prend en entrée deux champs de vecteurs $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ et retourne en sortie le champ de vecteurs $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{w} - \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v} - [\mathbf{v}, \mathbf{w}]$. On vérifie facilement qu'elle est antisymétrique. De plus, il est clair que $\mathcal{T}(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathcal{T}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \mathcal{T}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ tandis que si f est un champ scalaire alors

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(f\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \nabla_{f\mathbf{v}} \mathbf{w} - \nabla_{\mathbf{w}}(f\mathbf{v}) - [f\mathbf{v}, \mathbf{w}] \\ &= f \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{w} - (\mathbf{w}(f)\mathbf{v} - f \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v}) - (f[\mathbf{v}, \mathbf{w}] - \mathbf{w}(f)\mathbf{v}) \\ &= f \mathcal{T}(\mathbf{v}, \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Par l'antisymétrie, on en déduit que $\mathcal{T}$ est bilinéaire. Elle définit donc un tenseur de torsion T de variance $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ses composantes $T_{\mu\nu}^{\lambda}$ dans un champ de bases $(\mathbf{e}_{\mu})$ quelconque sont obtenues en exprimant $\mathcal{T}(\mathbf{e}_{\mu}, \mathbf{e}_{\nu})$:

$$\mathcal{T}(\mathbf{e}_{\mu}, \mathbf{e}_{\nu}) = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \mathbf{e}_{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \mathbf{e}_{\lambda} - [\mathbf{e}_{\mu}, \mathbf{e}_{\nu}] \implies T_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - [\mathbf{e}_{\mu}, \mathbf{e}_{\nu}]^{\lambda}.$$

En particulier, dans un champ de bases naturelles $(\mathbf{e}_p)$ on a $T_{qr}^p = \Gamma_{rq}^p - \Gamma_{qr}^p$. Une connexion sans torsion ($T = 0$) est donc synonyme de connexion symétrique au sens où Γ_{rq}^p et Γ_{qr}^p coïncident.

La dérivée covariante peut être étendue de façon naturelle à tout champ de tenseurs. La connexion est dite métrique (ou isométrique ou compatible avec la métrique) si $\nabla g = 0$. Or :

$$(\nabla_\lambda g)_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\lambda(g_{\mu\nu}) - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\rho\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho g_{\mu\rho} = \mathbf{e}_\lambda(g_{\mu\nu}) - \Gamma_{\nu\mu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu\lambda}.$$

À partir de cette relation (et des relations équivalentes obtenues en permutant circulairement λ, μ, ν) on tire

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \mathring{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} + K_{\lambda\mu\nu} \quad (6)$$

avec

$$\mathring{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{e}_\mu(g_{\lambda\nu}) + \mathbf{e}_\nu(g_{\mu\lambda}) - \mathbf{e}_\lambda(g_{\mu\nu}) + [\mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_\mu]_\lambda - [\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\lambda]_\nu + [\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\nu]_\mu \right)$$

et

$$K_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(T_{\lambda\nu\mu} - T_{\nu\mu\lambda} + T_{\mu\lambda\nu} \right). \quad (7)$$

On vérifie aisément que les $\mathring{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$ sont bien les symboles d'une connexion $\mathring{\nabla}$ (ils se transforment selon la bonne loi). La relation (6) montre alors que c'est la seule connexion métrique sans torsion. C'est ce qui caractérise la connexion de Levi-Civita. Ses symboles, dans un système de coordonnées, sont ceux de Christoffel :

$$\mathring{\Gamma}_{pqr} = \frac{1}{2} \left(\partial_q g_{pr} + \partial_r g_{qp} - \partial_p g_{qr} \right) = [p, qr].$$

En revanche, dans un champ de tétrades, on a

$$\mathring{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left([\mathbf{e}_\gamma, \mathbf{e}_\beta]_\alpha - [\mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\alpha]_\gamma + [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\gamma]_\beta \right) = \omega_{\alpha\beta\gamma}.$$

Une connexion métrique de torsion T admet (6) pour forme la plus générale, K étant sa contorsion. D'après ce que nous avons vu, Weyl se limite à la connexion de Levi-Civita. Les $\omega_{\alpha\beta\gamma}$ sont connus sous le nom de coefficients de rotation de Ricci.

§3. L'action de la matière

Le transport parallèle permet de définir la dérivée covariante des champs de vecteurs (et plus généralement des champs de tenseurs) mais aussi des champs de spineurs. Soit Ψ un tel champ. Par rapport à un champ de tétrades $(\mathbf{e}_\alpha)$ donné, il est représenté par $\psi = (\psi_a)_{a=1,2}$. On peut évaluer sans problème la différence de ces composantes entre les deux points infiniment voisins P et P' :

$$\psi_a(P') - \psi_a(P) = d\psi_a = \frac{\partial \psi_a}{\partial x^p} dx^p = \partial_p \psi_a dx^p$$

en utilisant un système de coordonnées, relation que l'on peut condenser en $\psi(P') - \psi(P) = d\psi = \psi_{,p} dx^p$. À présent, transportons parallèlement la tétrade $(\mathbf{e}_\alpha(P))$ dans le voisinage infinitésimal de P comme dans le paragraphe précédent. De la même façon que pour les vecteurs, il résulte du transport parallèle de $\Psi(P)$ jusqu'en P' un spineur $\Psi^{\parallel}(P')$ dont la représentation $\psi^{\parallel}(P')$ dans $(\mathbf{e}_\alpha^{\parallel}(P'))$ coïncide avec celle de $\Psi(P)$ dans $(\mathbf{e}_\alpha(P))$:

$$\psi^{\parallel}(P') = \psi(P).$$

Par ailleurs, $\psi^{\parallel}(P')$ s'obtient à partir de $\psi^{\parallel}(P')$ via la rotation $\mathcal{L}^{-1}: (\mathbf{e}_\alpha(P')) \rightarrow (\mathbf{e}_\alpha^{\parallel}(P'))$:

$$\psi^{\parallel}(P') \longrightarrow \psi^{\parallel}(P') = \psi^{\parallel}(P') + d\Sigma \cdot \psi^{\parallel}(P').$$

Nous avons donc

$$\psi(P) = \psi^{\parallel}(P') + d\Sigma \cdot \psi^{\parallel}(P') \quad \text{c.-à-d.} \quad \psi^{\parallel}(P') = \psi(P) - d\Sigma \cdot \psi(P).$$

Par conséquent, la dérivée covariante du spineur Ψ est représentée par

$$D\psi = \psi(P') - \psi^{\parallel}(P') = (\psi(P') - \psi(P)) + (\psi(P) - \psi^{\parallel}(P')) = d\psi + d\Sigma \cdot \psi.$$

C'est la variation des composantes du champ ψ entre P et P' à laquelle se retranche la variation $\delta_{\parallel}\psi = \psi^{\parallel}(P') - \psi(P) = -d\Sigma \cdot \psi$. Comme d'habitude, les infinitésimaux (du premier ordre) sont supposés dépendre linéairement du déplacement :

$$D\psi = \psi_{;p}dx^p = \psi_{;\alpha}w^{\alpha} \quad \text{et} \quad d\Sigma = \Sigma_p dx^p = \Sigma_{\alpha}w^{\alpha}.$$

Nous obtenons

$$\psi_{;p} = (\partial_p + \Sigma_p)\psi \quad \text{ou encore} \quad \psi_{;\alpha} = (e^{\alpha}_p \partial_p + \Sigma_{\alpha})\psi,$$

avec

$$d\Sigma = \frac{1}{2} d\omega_{\beta\gamma} S^{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \omega_{\beta\gamma\alpha} S^{\beta\gamma} w^{\alpha} \implies \Sigma_{\alpha} = \frac{1}{2} \omega_{\beta\gamma\alpha} S^{\beta\gamma}.$$

Donnons-nous un autre spineur Φ représenté par φ . Sous une transformation infinitésimale $\psi, \varphi \longrightarrow \psi', \varphi'$ engendrée par $\mathcal{L}^{-1}$, nous avons

$$\begin{aligned} \psi'^{\dagger} S^{\alpha} \varphi' &= \psi^{\dagger} \left(1 + \frac{1}{2} d\omega_{\beta\gamma} (S^{\beta\gamma})^{\dagger}\right) S^{\alpha} \left(1 + \frac{1}{2} d\omega_{\beta\gamma} S^{\beta\gamma}\right) \varphi \\ &= \psi^{\dagger} S^{\alpha} \varphi + \frac{1}{2} \psi^{\dagger} \left(S^{\alpha} d\omega_{\beta\gamma} S^{\beta\gamma} + d\omega_{\beta\gamma} (S^{\beta\gamma})^{\dagger} S^{\alpha}\right) \varphi \\ &= \psi^{\dagger} S^{\alpha} \varphi + \frac{1}{4} \psi^{\dagger} \left(2d\omega_{k0} \{S^{\alpha}, S^k\} + i d\omega_{kl} \varepsilon_{klm} [S^{\alpha}, S^m]\right) \varphi. \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 0$ on a

$$\psi'^{\dagger} S^0 \varphi' = \psi^{\dagger} S^0 \varphi + \frac{1}{4} \psi^{\dagger} \left(2d\omega^0_k \{S^0, S^k\}\right) \varphi = \psi^{\dagger} S^0 \varphi + d\omega^0_k \psi^{\dagger} S^k \varphi.$$

Puis, pour $\alpha = j$:

$$\begin{aligned} \psi'^{\dagger} S^j \varphi' &= \psi^{\dagger} S^j \varphi + \frac{1}{4} \psi^{\dagger} \left(2d\omega^j_0 \{S^j, S^k\} + i d\omega_{kl} \varepsilon_{klm} [S^j, S^m]\right) \varphi \\ &= \psi^{\dagger} S^j \varphi + \frac{1}{4} \psi^{\dagger} \left(4d\omega^j_0 \delta_{jk} - 2d\omega_{kl} \varepsilon_{klm} \varepsilon_{jmn} S^n\right) \varphi \\ &= \psi^{\dagger} S^j \varphi + \frac{1}{2} \psi^{\dagger} \left(2d\omega^j_0 + d\omega_{kl} (\delta_{jk} \delta_{ln} - \delta_{jl} \delta_{kn}) S^n\right) \varphi \\ &= \psi^{\dagger} S^j \varphi + d\omega^j_{\beta} \psi^{\dagger} S^{\beta} \varphi. \end{aligned}$$

En résumé :

$$\psi'^{\dagger} S^{\alpha} \varphi' = (\delta^{\alpha}_{\beta} + d\omega^{\alpha}_{\beta}) \psi^{\dagger} S^{\alpha} \varphi,$$

ce qui signifie que les $\psi^{\dagger} S^{\alpha} \varphi$ sont les composantes d'un vecteur en P (plus précisément : ils définissent un unique vecteur quel que soit le choix de la tétrade). Par suite, pour un spineur Ψ et tout vecteur $\mathbf{w}$ en P , les quantités $\psi^{\dagger} S^{\alpha} D\psi = (\psi^{\dagger} S^{\alpha} \psi_{;\beta}) w^{\beta}$ constituent les

composantes d'un vecteur $\tilde{\mathbf{w}}$ en P , et l'application $\mathbf{w} \mapsto \tilde{\mathbf{v}}$ est une application linéaire de l'espace tangent en P . Sa trace $\psi S^\alpha \psi_{;\alpha}$ est un scalaire et la quantité $\mathbf{m}$ donnée par

$$i \varepsilon \mathbf{m} = \psi^\dagger S^\alpha \psi_{;\alpha} = \psi^\dagger S^\alpha \left(e_\alpha^p \partial_p + \frac{1}{2} \omega_{\beta\gamma\alpha} S^{\beta\gamma} \right) \psi$$

est une densité scalaire complexe. Concentrons-nous sur la quantité $\omega_{\beta\gamma\alpha} S^\alpha S^{\beta\gamma}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \omega_{\beta\gamma\alpha} S^\alpha S^{\beta\gamma} &= \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma=0 \\ \alpha=\beta \neq \gamma}}^3 \omega_{\beta\gamma\alpha} S^\alpha S^{\beta\gamma} + \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma=0 \\ \beta \neq \gamma = \alpha}}^3 \omega_{\beta\gamma\alpha} S^\alpha S^{\beta\gamma} + \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma=0 \\ \alpha,\beta,\gamma \text{ distincts}}}^3 \omega_{\beta\gamma\alpha} S^\alpha S^{\beta\gamma} \\ &= 2 \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma=0 \\ \alpha=\beta \neq \gamma}}^3 \omega_{\beta\gamma\alpha} S^\alpha S^{\beta\gamma} + \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma=0 \\ \alpha,\beta,\gamma \text{ distincts}}}^3 \omega_{\beta\gamma\alpha} S^\alpha S^{\beta\gamma} \\ &= 2 \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma,\delta=0 \\ \alpha=\beta \neq \gamma}}^3 \omega_{\beta\gamma\alpha} S^\alpha \eta_{\beta\delta} S^{\delta\gamma} + \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma,\delta=0 \\ \alpha,\beta,\gamma \text{ distincts}}}^3 \omega_{\beta\gamma\alpha} S^\alpha \eta_{\beta\delta} S^{\delta\gamma}. \end{aligned}$$

Or, il est aisé de vérifier que

$$2S^\alpha \eta_{\beta\delta} S^{\delta\gamma} = \begin{cases} S^\gamma & \text{si } \alpha = \beta \neq \gamma \\ i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} S^\delta & \text{si } \alpha, \beta, \gamma \text{ distincts} \end{cases}.$$

Il vient alors

$$2\omega_{\beta\gamma\alpha} S^{\beta\gamma} = 2 \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma=0 \\ \alpha=\beta \neq \gamma}}^3 \omega_{\beta\gamma\alpha} S^\gamma + i \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma,\delta=0 \\ \alpha,\beta,\gamma \text{ distincts}}}^3 \omega_{\beta\gamma\alpha} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} S^\delta = (2\omega_{\delta\alpha}^\alpha + i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \omega_{\gamma\alpha}^\beta) S^\delta.$$

Nous savons déjà à quoi est égal le premier terme. Quant au second, remarquons que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \omega_{\gamma\alpha}^\beta &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} (\omega_{\gamma\alpha}^\beta - \omega_{\alpha\gamma}^\beta) = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\gamma]^\beta = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} e_\alpha^p \partial_p e_\gamma^q - e_\gamma^p \partial_p e_\alpha^q \\ &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} e_\alpha^p e_\gamma^q \partial_p e_\gamma^q. \end{aligned}$$

Il vient alors

$$i \varepsilon \mathbf{m} = \psi^\dagger e_\alpha^p S^\alpha \partial_p \psi + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha^p}{\partial x^p} \psi^\dagger S^\alpha \psi + \frac{i}{4} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} e_\alpha^\beta e_\gamma^p (\partial_p e_\gamma^q) \psi^\dagger S^\delta \psi,$$

soit encore :

$$\mathbf{m} = \frac{1}{i} \left(\psi^\dagger \mathbf{e}_\alpha^p S^\alpha \partial_p \psi + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha^p}{\partial x^p} \psi^\dagger S^\alpha \psi \right) + \frac{1}{4\varepsilon} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} e_\alpha^\beta e_\gamma^p (\partial_p e_\gamma^q) s^\delta,$$

où on a introduit le vecteur $\mathbf{s}$ de composantes $s^\alpha = \psi^\dagger S^\alpha \psi$. On constate que le dernier terme est une somme de 16 déterminants 4×4 , un pour chaque couple (p, q) , à savoir

$$\frac{1}{4\varepsilon} \left| e_\alpha^p, e_\alpha^q, \partial_p e_\alpha^q, s^\alpha \right| = \frac{1}{4\varepsilon} \begin{vmatrix} e_0^p, e_0^q, \partial_p e_0^q, s^0 \\ e_1^p, e_1^q, \partial_p e_1^q, s^1 \\ e_2^p, e_2^q, \partial_p e_2^q, s^2 \\ e_3^p, e_3^q, \partial_p e_3^q, s^3 \end{vmatrix}.$$

En utilisant le jeu de la transformation d'indices, on peut écrire comme Weyl $\mathfrak{e}_\alpha^p S^\alpha = \mathfrak{S}^p$. La partie imaginaire de $\mathfrak{m}$ est une divergence pure :

$$\frac{\mathfrak{m} - \bar{\mathfrak{m}}}{2i} = -\frac{1}{2} \left(\psi^\dagger \mathfrak{S}^p \partial_p \psi + \partial_p \psi^\dagger \mathfrak{S}^p \psi + \frac{\partial \mathfrak{e}_\alpha^p}{\partial x^p} \psi^\dagger S^\alpha \psi \right) = \partial_p \left(-\frac{1}{2} \psi^\dagger \mathfrak{S}^p \psi \right) = \partial_p \left(-\frac{1}{2} \mathfrak{s}^p \right).$$

Elle ne joue donc aucun rôle dans les équations du mouvements si l'on bâtit une action sur $\mathfrak{m}$. Dans la terminologie de Weyl, l'action

$$\int \mathfrak{m} d^4 x$$

est donc effectivement réelle. En d'autres termes, l'action construite sur la partie réelle de $\mathfrak{m}$ est équivalente. La densité lagrangienne associée à cette dernière est

$$\frac{\mathfrak{m} + \bar{\mathfrak{m}}}{2} = \frac{1}{2i} \left(\psi^\dagger S^\alpha \psi_{;\alpha} - \psi_{;\alpha}^\dagger S^\alpha \psi \right) = \frac{1}{2i} \left(\psi^\dagger \mathfrak{S}^p \partial_p \psi - \partial_p \psi^\dagger \mathfrak{S}^p \psi \right) + \frac{1}{4\epsilon} \left| e_\alpha^p, e_\alpha^q, \partial_p e_\alpha^q, s^\alpha \right|.$$

Dans le cadre de la relativité restreinte, c'est-à-dire en l'absence de gravitation, le système de coordonnées (x^p) peut être pris pour un système global de Minkowski $(x^0 = t, x^j)$, à savoir un système dont le champ de bases associé est un champ de tétrades, et on peut poser $(\mathbf{e}_\alpha) = (\mathbf{e}_p)$. On retombe alors sur le lagrangien usuel (à un facteur sans importance près)

$$\frac{\mathfrak{m} + \bar{\mathfrak{m}}}{2} = \frac{1}{2i} \left(\psi^\dagger S^\alpha \psi_{;\alpha} - \psi_{;\alpha}^\dagger S^\alpha \psi \right).$$

Bref, la prise en compte de la gravitation se fait via $\psi_{;\alpha} \rightarrow \psi_{;\alpha}$.

§4. Énergie(-impulsion)

Soit une intégrale d'action de la matière au sens large (matière + champ électromagnétique) forgée sur une quantité $\mathfrak{h}$ qui dépend à la fois des composantes ψ_a du champ de matière et A_p du potentiel électromagnétique (sans oublier la métrique) et de leurs dérivées jusqu'à un certain ordre. Autrement dit, c'est une certaine expression $\mathfrak{h}(\psi_a, A_p, g_{pq}, \dots)$ où les « ... » résument les dérivées. Puisque la donnée de la métrique revient à celle d'un champ de tétrades, on peut aussi considérer que la densité lagrangienne $\mathfrak{h}$ est une certaine expression $\mathfrak{h}(\psi_a, A_p, e_\alpha^p, \dots)$.

Les équations du mouvement sont issues du principe de Hamilton : la variation de $\mathfrak{h}$ par rapport aux ψ_a donne celles de la matière tandis que la variation par rapport aux A_p donne celles du champ électromagnétique. Nous symboliserons la dérivée lagrangienne issue des variations à l'aide de crochets : $[\mathfrak{h}, \psi_a]$ est la dérivée lagrangienne de $\mathfrak{h}$ issue de la variation de ψ_a , etc. Weyl définit la densité $\mathfrak{t}$ d'énergie-impulsion de la matière au sens large comme la dérivée lagrangienne de $\mathfrak{h}$ issue de la variation des e_α^p . Autrement dit :

$$\bar{\delta} \int \mathfrak{h} d^4 x = \int \bar{\delta} \mathfrak{h} d^4 x = \int t^\alpha_p \bar{\delta} e_\alpha^p d^4 x \quad (8)$$

où $\bar{\delta}$ est une variation quelconque des e_α^p s'annulant aux bords, les transformant en $e_\alpha^p + \bar{\delta} e_\alpha^p$ sans variation des ψ_a et des A_p , et sans déplacement dans l'espace-temps¹¹ donc sans variation du volume d'intégration (ce qui permet de passer $\bar{\delta}$ sous l'intégrale).

11. La « barre » au-dessus du symbole de variation sert à spécifier le fait que la variation en question s'effectue sans déplacement concomitant dans l'espace-temps ; on la qualifie parfois de verticale au sens où elle se passe « au-dessus » des points de l'espace-temps. Cela a pour conséquence la possibilité de passer le symbole $\bar{\delta}$ sous l'intégrale. En outre, le résultat de la variation verticale d'un champ ϕ donné est un certain

Weyl réclame deux invariances : (i) sous les variations du champ de tétrades et (ii) sous les changements de coordonnées. Elles consistent à dire que $\mathfrak{h}$ est la représentation dans un système de coordonnées et un champ de tétrades d'une quantité scalaire dont la représentation conserve la même forme fonctionnelle sous tout changement de tétrades et de coordonnées (covariance générale). La première invariance est une invariance sous la variation verticale

$$\mathbf{e}_\alpha \longrightarrow \mathbf{e}_{\alpha'} = \mathbf{e}_\alpha + d\omega_\alpha{}^\beta \mathbf{e}_\beta \quad \text{c.-à-d.} \quad e_\alpha{}^p \longrightarrow e_{\alpha'}{}^p = e_\alpha{}^p + \bar{\delta} e_\alpha{}^p \quad \text{avec} \quad \bar{\delta} e_\alpha{}^p = d\omega_\alpha{}^\beta e_\beta{}^p.$$

Or, les ψ_a dépendent de manière essentielle du champ de tétrade en présence. Par conséquent, une variation de ce dernier entraîne mécaniquement une certaine variation $\bar{\delta}\psi_a$ des ψ_a de sorte que l'invariance (i) s'écrit

$$\int \left(\mathfrak{t}^\alpha{}_p \bar{\delta} e_\alpha{}^p + [\mathfrak{h}, \psi_a] \bar{\delta} \psi_a \right) d^4x = 0.$$

Or :

$$\mathfrak{t}^\alpha{}_p \bar{\delta} e_\alpha{}^p = \mathfrak{t}^\alpha{}_p d\omega_\alpha{}^\beta e_\beta{}^p = \mathfrak{t}^\alpha{}_\beta d\omega_\alpha{}^\beta = \mathfrak{t}^{\alpha\beta} d\omega_{\alpha\beta}.$$

L'invariance (i) équivaut donc à

$$\int \left(\mathfrak{t}^{\alpha\beta} d\omega_{\alpha\beta} + [\mathfrak{h}, \psi_a] \bar{\delta} \psi_a \right) d^4x = 0. \quad (9)$$

En supposant les équations du mouvement de la matière (au sens large) vérifiées, nous obtenons la symétrie¹² $\mathfrak{t}_{\alpha\beta} \doteq \mathfrak{t}_{\beta\alpha}$ (nous employons le symbole $\doteq$ pour signifier une égalité vraie sur le mouvement ou « on-shell »).

champ ϕ' , différant infiniment peu de ϕ , tel que $\phi'(x) = \phi(x) + \bar{\delta}\phi(x)$. Il est clair que si ϕ est différentiable alors la variation induite sur ses dérivées est verticale et n'est rien d'autre que la dérivée de la variation de ϕ :

$$\partial_p \phi(x) \longrightarrow \partial_p \phi'(x) = \partial_p \phi(x) + \underbrace{\partial_p \bar{\delta}\phi(x)}_{\bar{\delta} \partial_p \phi(x)}.$$

En d'autres termes, $\bar{\delta}$ commute toujours avec les dérivations.

De façon plus globale, si $\mathfrak{h}$ est une fonction de champs $\phi_1, \phi_2, \dots$ dans l'espace-temps (que nous regrouperons sous un unique ϕ) et de leurs dérivées jusqu'à un certain ordre alors une variation sera généralement une transformation infinitésimale conjointe de l'espace-temps et de ϕ :

$$x^p \longrightarrow x'^p = x^p + \delta x^p \quad , \quad \phi(x) \longrightarrow \phi'(x') = \phi(x) + \delta\phi(x).$$

À cette variation est naturellement associée une variation verticale $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \bar{\delta}\phi(x)$ permettant de comparer ϕ et ϕ' (cette variation verticale $\bar{\delta}$ est parfois qualifiée de variation essentielle engendrée par $\bar{\delta}$; les deux variations coïncident évidemment si $\delta x = 0$). Les deux variations δ et $\bar{\delta}$ sont liées par

$$\delta\phi(x) = \phi'(x') - \phi(x) = [\phi'(x') - \phi'(x)] + [\phi'(x) - \phi(x)] = \delta x^p \partial_p \phi'(x) + \bar{\delta}\phi(x).$$

Comme ϕ et ϕ' diffèrent l'un de l'autre par un infinitésimal du premier ordre, on a à cet ordre

$$\delta\phi = \bar{\delta}\phi + \delta x^p \partial_p \phi.$$

Contrairement à $\bar{\delta}$, δ ne commute généralement pas avec les dérivées et on a

$$\partial_p \delta\phi = \partial_p \bar{\delta}\phi + \partial_p (\delta x^q \partial_q \phi) = \bar{\delta} \partial_p \phi + \delta x^q \partial_{pq}^2 \phi + (\partial_p \delta x^q) \partial_q \phi = \bar{\delta} \partial_p \phi + (\partial_p \delta x^q) \partial_q \phi.$$

12. On voit tout de suite qu'en l'absence d'une telle symétrie, la définition (8) aurait souffert d'une grave ambiguïté puisque si nous avons défini de façon *a priori* tout aussi légitime $\mathfrak{t}$ par $\bar{\delta}\mathfrak{h} = t_p{}^\alpha \bar{\delta} e_\alpha{}^p$ nous aurions obtenu un tenseur énergie-impulsion différent sur le mouvement.

À présent, passons à l'invariance (ii). Elle consiste à écrire

$$\int_{\Omega} \mathfrak{h}(\psi_a(x), A_p(x), e_{\alpha}^p(x), \dots) d^4x = \int_{\Omega'} \mathfrak{h}(\psi'_a(x'), A'_p(x'), e'^p_{\alpha}(x'), \dots) d^4x'$$

où le « prime » symbolise les changements à effectuer lorsque les différentes quantités sont exprimées dans un système de coordonnées $(x^{p'})$ au lieu de (x^p) . En particulier, Ω , qui est l'image dans $\mathbb{R}^4$ du domaine considéré dans l'espace-temps par l'attribution des coordonnées (x^p) , devient Ω' , image de ce même domaine par l'attribution des coordonnées $(x^{p'})$. Un changement de coordonnées est insignifiant au sens où il n'affecte en rien les objets « absolus » que sont ψ , A , et $(\mathbf{e}_{\alpha})$. Comme les $\mathbf{e}_{\alpha}$ sont inchangés, les ψ_a aussi : $\psi'_a(x') = \psi_a(x)$. En revanche, les composantes de A et des $\mathbf{e}_{\alpha}$ sont affectées. Plus précisément, on a

$$A'_p(x') = A_{p'}(x') = \frac{\partial x^q}{\partial x^{p'}}(x') A_q(x) \quad \text{et} \quad e'^p_{\alpha}(x') = e_{\alpha}^{p'}(x') = \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^q}(x) e_{\alpha}^q(x).$$

En ramenant le domaine d'intégration à Ω , l'égalité (9) peut donc aussi s'écrire

$$\int_{\Omega} \left[\mathfrak{h}(\psi_a(x), A_{p'}(x'), e_{\alpha}^{p'}(x'), \dots) \left| \frac{d^4x'}{d^4x}(x) \right| - \mathfrak{h}(\psi_a(x), A_p(x), e_{\alpha}^p(x), \dots) \right] d^4x = 0, \quad (10)$$

où $|d^4x'/d^4x|$ dénote le Jacobien associé au changement de coordonnées et où chaque occurrence de x' est à comprendre en tant que fonction de x . Considérons le cas où le changement de variables est infinitésimal, de la forme

$$x^p \longrightarrow x^{p'} = x^p + \delta x^p(x) \quad \text{avec} \quad \delta x^p(x) = \xi^p(x)$$

un champ de vecteurs infinitésimal engendrant la transformation. Nous avons alors en un point P :

$$\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^q}(x) = \delta^p_q + \partial_q \xi^p(x),$$

et inversement :

$$\frac{\partial x^p}{\partial x^{q'}}(x') = \delta^p_q - \partial_q \xi^p(x).$$

Nous avons ensuite (puisque nous en restons au premier ordre) :

$$\left| \frac{d^4x'}{d^4x} \right| = \det \left[(\delta^p_q + \partial_q \xi^p)_{pq} \right] = \det \left[e^{(\partial_q \xi^p)_{pq}} \right] = e^{\text{tr}[(\partial_q \xi^p)_{pq}]} = 1 + \partial_p \xi^p.$$

En notant simplement $\mathfrak{h}$ la valeur non variée $\mathfrak{h}(\psi_a(x), A_p(x), e_{\alpha}^p, \dots)$ et $\delta \mathfrak{h}$ la quantité dont $\mathfrak{h}$ varie pour devenir $\mathfrak{h}(\psi_a(x), A_{p'}(x), e_{\alpha}^{p'}, \dots)$, nous avons alors (au premier ordre)

$$\int_{\Omega} \left[(\mathfrak{h} + \delta \mathfrak{h})(1 + \partial_p \xi^p) - \mathfrak{h} \right] d^4x = \int_{\Omega} \left[\delta \mathfrak{h} + \mathfrak{h} \partial_p \xi^p \right] d^4x = 0.$$

Nous obtenons ainsi, en omettant le domaine d'intégration :

$$\int \left[\bar{\delta} \mathfrak{h} + \partial_p (\mathfrak{h} \xi^p) \right] d^4x = 0,$$

où $\bar{\delta}$ est la variation essentielle associée à δ . En se focalisant sur les ξ^p s'annulant au bord (ainsi que leurs dérivées jusqu'à un ordre suffisant) on a alors

$$\int \left[[\mathfrak{h}, A_p] \bar{\delta} A_p + \mathfrak{t}^{\alpha}_p \bar{\delta} e_{\alpha}^p + \partial_p (\mathfrak{h} \xi^p) \right] d^4x = 0.$$

Il ne nous reste plus qu'à exprimer les variations essentielles de A_p et e_α^p . C'est chose facile à partir de

$$A_p(x) \longrightarrow A_{p'}(x') = \frac{\partial x^q}{\partial x^{p'}}(x') A_q(x) = A_p(x) + \delta A_p(x) \quad \text{avec} \quad \delta A_p(x) = -\partial_p \xi^q(x) A_q(x),$$

et

$$e_\alpha^p(x) \longrightarrow e_\alpha^{p'}(x') = \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^q}(x) e_\alpha^q(x) = e_\alpha^p(x) + \delta e_\alpha^p(x) \quad \text{avec} \quad \delta e_\alpha^p(x) = \partial_q \xi^p(x) e_\alpha^q(x).$$

On a donc

$$\int \left[[\mathfrak{h}, A_p] (-\partial_p \xi^q A_q - \xi^q \partial_q A_p) + \mathfrak{t}_p^\alpha (\partial_q \xi^p e_\alpha^q - \xi^q \partial_q e_\alpha^p) + \partial_p (\mathfrak{h} \xi^p) \right] d^4 x = 0.$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \int \xi^q \left(-[\mathfrak{h}, A_p] \partial_q A_p - \mathfrak{t}_p^\alpha \partial_q e_\alpha^p + \partial_p ([\mathfrak{h}, A_p] A_q - \mathfrak{t}_q^\alpha e_\alpha^p) \right) d^4 x \\ + \int \partial_p \left(\mathfrak{h} \xi^p - ([\mathfrak{h}, A_p] A_q - \mathfrak{t}_q^\alpha e_\alpha^p) \xi^q \right) d^4 x = 0. \end{aligned}$$

La deuxième intégrale est un terme de bord qui est nul vu que nous nous restreignons aux ξ^p s'annulant au bord. Nous en déduisons l'identité

$$[\mathfrak{h}, A_p] \partial_q A_p + \mathfrak{t}_p^\alpha \partial_q e_\alpha^p - \partial_p ([\mathfrak{h}, A_p] A_q - \mathfrak{t}_q^\alpha e_\alpha^p) = 0.$$

Weyl a, « sans le dire », appliqué le théorème de Noether, l'identité ci-dessus étant l'identité de Noether correspondant à l'invariance générale. Lorsque les équations de la matière sont vérifiées, il vient alors ¹³

$$\mathfrak{t}_p^\alpha \partial_q e_\alpha^p + \partial_p (\mathfrak{t}_q^\alpha e_\alpha^p) \doteq 0 \iff \partial_p \mathfrak{t}_q^p + \mathfrak{t}_p^\alpha \partial_q e_\alpha^p \doteq 0. \quad (11)$$

Dans le cadre de la relativité restreinte, en utilisant un système global de Minkowski, l'égalité précédente devient la véritable loi de conservation

$$\partial_p \mathfrak{t}^{pq} = \partial_t \mathfrak{t}^{0q} + \partial_j \mathfrak{t}^{jq} \doteq 0.$$

Cette équation exprime que le taux de variation de $\mathfrak{t}^{0q}$ dans le temps, en un point, est égal au flux du champ de (tri-)vecteurs $(\mathfrak{t}^{jq})_j$ à travers une surface infinitésimale renfermant ce point. En supposant que le flux du champ $(\mathfrak{t}^{jq})_j$ s'annule à l'infini spatial, et en intégrant la loi de conservation sur une hypersurface (d'extension infinie) d'équation $t = \text{cte}$, nous obtenons la conservation on-shell des quantités

$$P^p = \int \mathfrak{t}^{0p} d^3 x$$

qui constituent le quadrivecteur énergie-impulsion ($E = P^0, P^j$). De plus, en utilisant la symétrie on-shell de $\mathfrak{t}$ on a

$$\partial_r (x^p \mathfrak{t}^{rq} - x^q \mathfrak{t}^{rp}) = \mathfrak{t}^{pq} + x^p \partial_r \mathfrak{t}^{rq} - \mathfrak{t}^{qp} - x^q \partial_r \mathfrak{t}^{rp} \doteq 0.$$

13. Lorsque l'on étend naturellement la dérivation covariante aux densités tensorielles, on constate que (11) équivaut à $\mathfrak{t}_{q;p}^p$, forme que l'on retrouve par exemple dans le livre de Schrödinger [4].

Il vient alors la conservation des quantités

$$M^{pq} = \int (x^p \mathfrak{t}^{0q} - x^q \mathfrak{t}^{0p}) d^3x$$

antisymétriques en p et q . Cela revient à la conservation de deux vecteurs d'espace : le moment cinétique $J^i = \varepsilon^{ijk} M^{jk}$ et

$$C^i = M^{i0} = \int x^i \mathfrak{t}^{00} d^3x - t \int \mathfrak{t}^{0i} d^3x = \langle E \rangle(t) - P^i t$$

où $\langle E \rangle(t)$ est le centre d'énergie à l'instant t . Ainsi, la conservation de C^i s'interprète comme le fait que le centre d'énergie se déplace de manière rectiligne et uniforme dans l'espace, sa valeur retenant celle du centre d'énergie à l'instant $t = 0$.

Appliquons la théorie générale développée ci-dessus à la densité lagrangienne $\mathfrak{m}$ bâtie précédemment. Avant toute chose, rappelons que si $T = (T^{p\cdots q\cdots})$ est un champ tensoriel de densité $\mathfrak{T} = (\mathfrak{T}^{p\cdots q\cdots})$ alors sous une variation quelconque :

$$\delta \mathfrak{T}^{p\cdots q\cdots} = \delta \left(\frac{T^{p\cdots q\cdots}}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \delta T^{p\cdots q\cdots} - \frac{1}{\varepsilon^2} T^{p\cdots q\cdots} \delta \varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \left(\delta T^{p\cdots q\cdots} - e^\alpha_r T^{p\cdots q\cdots} \delta e^\alpha_r \right).$$

Comme l'a fait remarquer Weyl, seule la partie réelle de $\mathfrak{m}$ contribue dans les équations du mouvement. Plutôt que de raisonner sur $\mathfrak{m}$ comme il le fait, raisonnons donc sur sa partie réelle que l'on peut scinder en deux parties :

$$\frac{\mathfrak{m} + \bar{\mathfrak{m}}}{2} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 \quad \text{avec} \quad \mathfrak{h}_1 = \frac{1}{2i} \left(\psi^\dagger \mathfrak{S}^p \psi_{,p} - \psi_{,p}^\dagger \mathfrak{S}^p \psi \right), \quad \mathfrak{h}_2 = \frac{1}{4\varepsilon} \left| e_\alpha^p, e^\alpha_q, \partial_p e_\alpha^q, s^\alpha \right|.$$

La partie $\mathfrak{h}_1$ est directement linéaire en les $\mathfrak{e}_\alpha^p$ et ne dépend pas de leurs dérivées, ce qui rend évident sa variation sans effectuer d'intégration par parties :

$$\bar{\delta} \mathfrak{h}_1 = u^\alpha_p \bar{\delta} \mathfrak{e}_\alpha^p \quad \text{avec} \quad u^\alpha_p = \frac{1}{2i} \left(\psi^\dagger S^\alpha \psi_{,p} - \psi_{,p}^\dagger S^\alpha \psi \right).$$

Pour obtenir la contribution de $\mathfrak{h}_1$ dans la densité d'énergie-impulsion, il suffit de développer :

$$\bar{\delta} \mathfrak{h}_1 = u^\alpha_p \frac{1}{\varepsilon} \left(\bar{\delta} e_\alpha^p - e^\beta_q e_\alpha^p \bar{\delta} e_\beta^q \right) = (u^\alpha_p - u^\beta_q e_\alpha^p e_\beta^q) \bar{\delta} e_\alpha^p = (u^\alpha_p - u e_\alpha^p) \bar{\delta} e_\alpha^p$$

où u est la densité scalaire $u^\beta_\beta = u^\beta_q e_\beta^q$. La contribution à la densité d'énergie-impulsion est donc

$$t_1^\alpha_p = u^\alpha_p - u e_\alpha^p \quad \text{c.-à-d.} \quad t_1^q_p = (u^\alpha_p - u e_\alpha^p) e_\alpha^q = u^q_p - u \delta^q_p.$$

À présent, penchons-nous sur $\mathfrak{h}_2$ dont la dépendance dans les e_α^p est plus compliquée. Pour simplifier, Weyl se limite au cas de la relativité restreinte. En utilisant un unique système de Minkowski ($\mathbf{e}_\alpha$) = ($\mathbf{e}_p$), il est clair que $\mathfrak{h}_2$ est identiquement nul. Cependant, $\mathfrak{h}_2$ ne sera plus identiquement nul, en général, après avoir fait varier les e_α^p . Toujours sous cette limitation à la relativité restreinte avec un unique système de Minkowski, on a

$$\begin{aligned} \left| \bar{\delta} \left| e_\alpha^p, e^\alpha_q, \partial_p e_\alpha^q, s^\alpha \right| \right| &= \left| \bar{\delta} e_\alpha^p, e^\alpha_q, \partial_p e_\alpha^q, s^\alpha \right| + \left| e_\alpha^p, \bar{\delta} e^\alpha_q, \partial_p e_\alpha^q, s^\alpha \right| + \left| e_\alpha^p, e^\alpha_q, \bar{\delta} \partial_p e_\alpha^q, s^\alpha \right| \\ &= \left| e_\alpha^p, e^\alpha_q, \partial_p \bar{\delta} e_\alpha^q, s^\alpha \right| \\ &= \partial_p \left| e_\alpha^p, e^\alpha_q, \bar{\delta} e_\alpha^q, s^\alpha \right| - \left| \partial_p e_\alpha^p, e^\alpha_q, \bar{\delta} e_\alpha^q, s^\alpha \right| - \left| e_\alpha^p, \partial_p e_\alpha^q, \bar{\delta} e_\alpha^q, s^\alpha \right| \\ &\quad - \left| e_\alpha^p, e^\alpha_q, \bar{\delta} e_\alpha^q, \partial_p s^\alpha \right| \\ &= \partial_p \left| e_\alpha^p, e^\alpha_q, \bar{\delta} e_\alpha^q, s^\alpha \right| + \left| \bar{\delta} e_\alpha^q, e^\alpha_q, e_\alpha^p, \partial_p s^\alpha \right|. \end{aligned}$$

Puis :

$$\bar{\delta}h_2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\varepsilon} \bar{\delta} \left| e_\alpha^p, e_\alpha^q, \partial_p e_\alpha^q, s^\alpha \right| + \left| e_\alpha^p, e_\alpha^q, \partial_p e_\alpha^q, s^\alpha \right| \bar{\delta} \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Le deuxième déterminant est bien sûr nul, et puisque $\varepsilon = 1$ on a

$$\bar{\delta}h_2 = \frac{1}{4} \left| \bar{\delta} e_\alpha^q, e_\alpha^q, e_\alpha^p, \partial_p s^\alpha \right| + \text{divergence}.$$

En éliminant le terme de divergence vu qu'on réalise des variations s'annulant aux bords, on obtient la contribution t_2 de h_2 à l'énergie-impulsion. En particulier, les composantes de t_2 mêlant le temps sont

$$t_2^0{}_q = \frac{1}{4} \left| e^j{}_q, e_j^p, \partial_p s^j \right| = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} e^1{}_q, e_1^p, \partial_p s^1 \\ e^2{}_q, e_2^p, \partial_p s^2 \\ e^3{}_q, e_3^p, \partial_p s^3 \end{vmatrix}.$$

On a donc $t_2^0{}_0 = 0$ et

$$t_2^0{}_1 = \frac{1}{4} (\partial_2 s^3 - \partial_3 s^2) \quad , \quad t_2^0{}_2 = \frac{1}{4} (\partial_3 s^1 - \partial_1 s^3) \quad , \quad t_2^0{}_3 = \frac{1}{4} (\partial_1 s^2 - \partial_2 s^1),$$

c'est-à-dire $t_2^0{}_j = \frac{1}{4} (\text{rot } s)_j$. À partir de $t^0{}_0 = u^0{}_0 - u = -u^j{}_j$ on tire l'énergie totale

$$E = P^0 = \int t^{00} d^3x = -\frac{1}{2i} \int (\psi^\dagger S^j \psi_{,j} - \psi_{,j}^\dagger S^j \psi) d^3x = -\frac{1}{i} \int \psi^\dagger S^j \psi_{,j} d^3x,$$

obtenue après une intégration par parties sur le deuxième terme dans l'intégrale. On en déduit que l'opérateur d'énergie d'un spineur libre est

$$\mathcal{H} = i S^j \partial_j.$$

À partir de $t^0{}_j = u^0{}_j + \frac{1}{4} (\text{rot } s)_j$ on tire l'impulsion totale

$$P^j = \int t^{0j} d^3x = \int u^{0j} d^3x = \frac{1}{2i} \int (\psi^\dagger \psi_{,j} - \psi_{,j}^\dagger \psi) d^3x = \frac{1}{i} \int \psi^\dagger \psi_{,j} d^3x,$$

où on a utilisé le fait que l'intégrale d'un rotationnel dans un volume pouvait se transformer en une intégrale de surface. On en déduit que l'opérateur d'impulsion d'un spineur est

$$\vec{p} = \frac{1}{i} \vec{\nabla} = p^j \mathbf{e}_j \quad \text{avec} \quad p^j = \frac{1}{i} \partial_j,$$

en accord avec l'opérateur habituel d'impulsion en mécanique quantique (Schrödinger). Enfin, il est facile de vérifier avec des intégrations par parties adaptées que le moment cinétique total est

$$\vec{J} = \int \psi^\dagger \left(\vec{x} \times \vec{p} + \frac{1}{2} \vec{S} \right) \psi d^3x,$$

et on en déduit l'opérateur moment cinétique

$$\vec{J} = \vec{x} \times \vec{p} + \frac{1}{2} \vec{S}.$$

On voit apparaître la contribution du spin interne au spin total, en plus du spin orbital. Comme le relève Weyl, il est intéressant que la prise en compte de h_2 , bien que nul en relativité restreinte dans un système de Minkowski, permet de faire apparaître le spin interne. En revanche, sa conclusion est étonnante. C'est vrai que la relativité générale ne fixe pas la métrique a priori puisqu'elle est dynamique. De là à en déduire que c'est uniquement grâce à cela que l'on peut faire varier les e_α^p . . . On pourrait très bien dire que le tenseur énergie-impulsion se déduit dans tous les cas de la variation « virtuelle » des e_p^α à partir d'une densité lagrangienne généralement covariante.

§5. Gravitation

Soient P_d et P_δ deux points infiniment voisins de P . Dans un système de coordonnées arbitraire, on a $P = (x^p)$, $P_d = (x^p + dx^p)$, et $P_\delta = (x^p + \delta x^p)$. Le transport parallèle du vecteur PP_d le long de PP_δ produit en P_δ un certain vecteur $P_\delta P_1 = (dx^p + \delta dx^p)$ où $\delta x^p = -\Gamma^p_{qr} dx^q \delta x^r$. De même, le transport parallèle du vecteur PP_δ le long de PP_d produit en P_d un certain vecteur $P_d P_2 = (\delta x^p + d\delta x^p)$ où $d\delta x^p = -\Gamma^p_{qr} \delta x^q dx^r$, et on a

$$(PP_\delta + P_\delta P_1)^p - (PP_d + P_d P_2)^p = (\Gamma^p_{rq} - \Gamma^p_{qr}) dx^q \delta x^r.$$

La non-torsion, soit l'égalité $d\delta x^p = \delta dx^p$, revient donc à la règle du parallélogramme infinitésimal, à savoir la coïncidence de P_1 et P_2 , point commun que Weyl note P^* .

À présent, transportons la tétrade $(\mathbf{e}_\alpha(P))$ le long du premier chemin $PP_d P^*$. Afin de rendre les choses plus lisibles, deux points infiniment voisins P et P' étant donnés, je vais noter $\mathcal{T}(\cdot, P, P')$ l'application linéaire associant à tout vecteur $\mathbf{v}$ en P le vecteur $\mathcal{T}(\mathbf{v}, P, P')$ obtenu par transport parallèle de $\mathbf{v}$ du point P au point P' . Nous cherchons donc les vecteurs

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathcal{T}(\mathbf{e}_\alpha(P), P, P_d), P_d, P^*) &= \mathcal{T}((\delta_\alpha^\beta + d\omega_\alpha^\beta(P))\mathbf{e}_\beta(P_d), P_d, P^*) \\ &= (\delta_\alpha^\beta + d\omega_\alpha^\beta(P))\mathcal{T}(\mathbf{e}_\beta(P_d), P_d, P^*) \\ &= (\delta_\alpha^\beta + d\omega_\alpha^\beta(P))(\delta_\beta^\gamma + \delta\omega_\beta^\gamma(P_d))\mathbf{e}_\gamma(P^*) \\ &= \mathbf{e}_\gamma(P^*)(\delta_\beta^\gamma - \delta\omega_\beta^\gamma(P_d))(\delta_\alpha^\beta - d\omega_\alpha^\beta(P)) \end{aligned}$$

où $\delta\omega_\beta^\alpha(P_d) = \omega_\beta^\alpha(P_d)\delta x^p$ et $d\omega_\beta^\alpha(P) = \omega_\beta^\alpha(P)dx^p$. De façon plus compacte, nous obtenons en P^* la tétrade

$$\mathbf{e}^{(d)} = \mathbf{e}(P^*) \cdot (1 - \delta\Omega(P_d))(1 - d\Omega(P)).$$

Le transport de la tétrade $(\mathbf{e}_\alpha(P))$ le long du deuxième chemin $PP_\delta P^*$ donne quant à lui la tétrade

$$\mathbf{e}^{(\delta)} = \mathbf{e}(P^*) \cdot (1 - d\Omega(P_\delta))(1 - \delta\Omega(P)).$$

La différence résultant entre les deux tétrades est donc

$$\mathbf{e}^{(\delta)} - \mathbf{e}^{(d)} = \mathbf{e}(P^*) \cdot \mathbf{Q}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= (1 - d\Omega(P_\delta))(1 - \delta\Omega(P)) - (1 - \delta\Omega(P_d))(1 - d\Omega(P)) \\ &= [\delta\Omega(P_d) - \delta\Omega(P)] - [d\Omega(P_\delta) - d\Omega(P)] + d\Omega(P_\delta)\delta\Omega(P) - \delta\Omega(P_d)d\Omega(P) \end{aligned}$$

En définissant les matrices $\Omega_p = (\omega_\beta^\alpha)_{\alpha\beta}$ on a alors au second ordre

$$\mathbf{Q} = Q_{pq} dx^p \delta x^q = \frac{1}{2} Q_{pq} \Delta x^{pq} \quad \text{où} \quad \Delta x^{pq} = dx^p \delta x^q - \delta x^p dx^q$$

est l'élément de surface et Q_{pq} la matrice

$$Q_{pq} = \partial_p \Omega_q - \partial_q \Omega_p + \Omega_p \Omega_q - \Omega_q \Omega_p$$

antisymétrique sous l'échange de p et q . Considérons plus généralement un vecteur $\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{e}_\alpha(P)$ en P . En le transportant parallèlement le long du chemin $PP_d P^*$ (resp. $PP_\delta P^*$),

nous obtenons en P^* le vecteur $\mathbf{v}^{(d)} = v^\alpha \mathbf{e}_\alpha^{(d)}$ (resp. $\mathbf{v}^{(\delta)} = v^\alpha \mathbf{e}_\alpha^{(\delta)}$). La différence entre $\mathbf{v}^{(\delta)}$ et $\mathbf{v}^{(d)}$ est donc

$$\mathbf{v}^{(\delta)} - \mathbf{v}^{(d)} = \frac{1}{2} Q^\alpha_\beta v^\beta \mathbf{e}_\alpha(P^*) = \frac{1}{2} (Q_{pq})^\alpha_\beta \Delta x^{pq} v^\beta \mathbf{e}_\alpha(P^*).$$

Or, par définition, c'est la courbure de Riemann qui évalue cette différence. La relation ci-dessus revient à la donnée du tenseur de Riemann dans un système mixte :

$$\mathbf{v}^{(\delta)} - \mathbf{v}^{(d)} = \frac{1}{2} R^\alpha_{\beta pq} v^\beta \Delta x^{pq} \mathbf{e}_\alpha(P^*) \implies R^\alpha_{\beta pq} = (Q_{pq})^\alpha_\beta.$$

Ce tenseur s'écrit plus traditionnellement dans la base naturelle :

$$R^r_{spq} = e_\alpha^r e^\beta_s R^\alpha_{\beta pq} = e_\alpha^r e^\beta_s (Q_{pq})^\alpha_\beta.$$

Après quelques calculs, on retrouve bien la formule habituelle

$$R^r_{spq} = \partial_p \Gamma^r_{sq} - \partial_q \Gamma^r_{sp} + \Gamma^r_{up} \Gamma^u_{sq} - \Gamma^r_{uq} \Gamma^u_{sp}.$$

Le tenseur de Ricci a pour composantes

$$R_{sq} = R^r_{srq} = e_\alpha^r e^\beta_s (Q_{rq})^\alpha_\beta.$$

La courbure scalaire est donc

$$\begin{aligned} R &= R^q_q = e_\alpha^p e^\beta_q (Q_{pq})^\alpha_\beta = e_\alpha^p e^\beta_q (\partial_p \omega^\alpha_{\beta q} - \partial_q \omega^\alpha_{\beta p} + \omega^\alpha_{\gamma p} \omega^\gamma_{\beta q} - \omega^\alpha_{\gamma q} \omega^\gamma_{\beta p}) \\ &= e_\alpha^p e^\beta_q (\partial_p \omega^{\alpha\beta}_q - \partial_q \omega^{\alpha\beta}_p) + \omega^\alpha_{\gamma\alpha} \omega^{\gamma\beta}_\beta - \omega^\alpha_{\gamma\beta} \omega^{\gamma\beta}_\alpha \\ &= (e_\alpha^p e_\beta^q - e_\alpha^q e_\beta^p) \partial_p \omega^{\alpha\beta}_q + \omega^\alpha_{\gamma\alpha} \omega^{\gamma\beta}_\beta - \omega^\alpha_{\gamma\beta} \omega^{\gamma\beta}_\alpha. \end{aligned}$$

En notant $\simeq$ une égalité vraie à une divergence près, la contribution du premier terme dans la densité de courbure scalaire est

$$\begin{aligned} (e_\alpha^p e_\beta^q - e_\alpha^q e_\beta^p) \partial_p \omega^{\alpha\beta}_q &\simeq -\partial_p (e_\alpha^p e_\beta^q - e_\alpha^q e_\beta^p) \omega^{\alpha\beta}_q \\ &\simeq -\partial_p e_\alpha^p \omega^{\alpha\beta}_\beta - e_\alpha^p \partial_p e_\beta^q \omega^{\alpha\beta}_q + \partial_p e_\alpha^q e_\beta^p \omega^{\alpha\beta}_q + \partial_p e_\beta^p \omega^{\alpha\beta}_\alpha \\ &\simeq 2 \partial_p e_\beta^p \omega^{\alpha\beta}_\alpha + \frac{1}{\varepsilon} [e_\beta, e_\alpha]^q \omega^{\alpha\beta}_q \\ &\simeq \frac{1}{\varepsilon} \left(2 \omega^\gamma_{\beta\gamma} \omega^{\alpha\beta}_\alpha + (\omega^\gamma_{\alpha\beta} - \omega^\gamma_{\beta\alpha}) \omega^{\alpha\beta}_\gamma \right) \\ &\simeq \frac{2}{\varepsilon} \left(\omega^\gamma_{\beta\gamma} \omega^{\alpha\beta}_\alpha + \omega^\gamma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}_\gamma \right). \end{aligned}$$

La courbure scalaire $\mathfrak{R}$ est donc donnée par

$$\varepsilon \mathfrak{R} \simeq \omega^\gamma_{\beta\gamma} \omega^{\alpha\beta}_\alpha + \omega^\gamma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}_\gamma.$$

Une densité lagrangienne étant définie à une divergence près, on peut prendre pour densité lagrangienne de gravitation la quantité $\mathfrak{g}$ donnée par

$$\varepsilon \mathfrak{g} = \omega^\gamma_{\beta\gamma} \omega^{\alpha\beta}_\alpha + \omega^\gamma_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}_\gamma.$$

La courbure scalaire R est — comme son nom l'indique — un scalaire. En lui retranchant une divergence, la quantité restante ε n'est plus un scalaire. Cependant, c'est un scalaire effectif au sens variationnel. Son avantage réside dans le fait qu'il dépend des e_α^p et de

leurs dérivées premières mais pas de leurs dérivées secondes. Finalement, les équations gravitationnelles résulteront de la variation de l'action totale

$$\int (\mathfrak{g} + \varkappa \mathfrak{h}) d^4x$$

où $\varkappa$ est une constante. Ces équations sont

$$[\mathfrak{g}, e_\alpha^p] + \varkappa \mathfrak{t}_p^\alpha = 0.$$

La quantité $\mathfrak{g}$ est une certaine fonction $\mathfrak{g}(e_\alpha^p, \partial_q e_\alpha^p)$ qui dépend des coordonnées au travers des grandeurs dynamiques. Autrement dit, $\mathfrak{g}$ ne dépend pas explicitement des coordonnées : $\mathfrak{g}(e_\alpha^p(x), \partial_q e_\alpha^p(x))$ reste alors invariant sous toute « translation rigide »

$$\begin{aligned} x^p &\longrightarrow x^p + \xi^p & (\delta x^p = \xi^p \text{ constant}), \\ e_\alpha^p(x) &\longrightarrow e_\alpha^p(x) & (\delta e_\alpha^p = 0). \end{aligned}$$

En effet, les δx^p étant constants, δ commute avec les dérivées partielles et on a

$$\delta \mathfrak{g} = \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial e_\alpha^p} \delta e_\alpha^p + \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial e_{\alpha,q}^p} \delta e_{\alpha,q}^p = \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial e_\alpha^p} \delta e_\alpha^p + \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial e_{\alpha,q}^p} \partial_q \delta e_\alpha^p = 0.$$

À ce type de variation est associée la variation essentielle

$$\bar{\delta} e_\alpha^p = \delta e_\alpha^p - \xi^q \partial_q e_\alpha^p = -\xi^q \partial_q e_\alpha^p.$$

Nous avons alors

$$0 = \delta \mathfrak{g} = \bar{\delta} \mathfrak{g} + \xi^p \partial_p \mathfrak{g}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial e_\alpha^p} \bar{\delta} e_\alpha^p + \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial e_{\alpha,q}^p} \partial_q \bar{\delta} e_\alpha^p + \xi^p \partial_p \mathfrak{g} \\ &= [\mathfrak{g}, e_\alpha^p] \bar{\delta} e_\alpha^p + \partial_q \left(\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial e_{\alpha,q}^p} \bar{\delta} e_\alpha^p \right) + \xi^p \partial_p \mathfrak{g} \\ &= \xi^p \left[\partial_q \left(\bar{\delta}_p^q \mathfrak{g} - \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial e_{\alpha,q}^r} \partial_p e_\alpha^r \right) + [\mathfrak{g}, e_\alpha^q] \partial_p e_\alpha^q \right] = 0. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout ξ^p , il vient

$$\partial_q \mathfrak{v}_p^q + [\mathfrak{g}, e_\alpha^q] \partial_p e_\alpha^q = 0,$$

où on a introduit

$$\mathfrak{v}_p^q = \delta_p^q \mathfrak{g} - \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial e_{\alpha,q}^r} \partial_p e_\alpha^r.$$

Si les équations gravitationnelles sont vérifiées alors on a

$$\partial_q \mathfrak{v}_p^q - \varkappa \mathfrak{t}_q^\alpha \partial_p e_\alpha^q \doteq 0.$$

Si, de plus, les équations de la matière sont vérifiées alors la loi (11) nous donne

$$\partial_q \mathfrak{v}_p^q + \varkappa \partial_q \mathfrak{t}_p^q \doteq 0,$$

c'est-à-dire

$$\partial_q(\mathfrak{v}^q_p + \kappa \mathfrak{t}^q_p) \doteq 0.$$

C'est une loi de conservation dans laquelle $\mathfrak{v}^q_p$ peut être pensée comme une densité d'énergie-impulsion du champ gravitationnel¹⁴. Cependant, elle dérive d'une quantité qui n'est pas une densité scalaire et n'est donc pas une densité tensorielle contrairement à $\mathfrak{t}^q_p$. En particulier, comme $\mathfrak{g}$ peut s'exprimer exclusivement en fonction de la métrique et de ses dérivées premières, tout comme $\mathfrak{v}$, un changement de coordonnées judicieux peut permettre d'annuler $\mathfrak{v}$ en un point arbitraire. Il est donc impossible d'interpréter absolument $\mathfrak{v}$ comme la densité d'énergie-impulsion du champ gravitationnel.

Remarque. L'invariance de $\mathfrak{g}$ utilisée revient au fait que $\mathfrak{g}$, qui ne préserve pas sa forme sous un changement de coordonnées quelconque, la préserve néanmoins sous un changement $x^p \rightarrow x^{p'} = x^p + \xi^p$ avec ξ^p constant. Autrement dit, le groupe d'invariance générale de la densité scalaire a été réduit au groupe des translations rigides en passant à $\mathfrak{g}$.

Références

- [1] H. Weyl, *Elektron und Gravitation*, Zeit. f. Physik **56**, 330 (1929). Article reproduit en anglais dans O'Raifeartaigh, *The Dawning of Gauge Theory* (Princeton University Press, 1997).
- [2] É.ourgoulhon, *Relativité Restreinte : des particules à l'astrophysique* (EDP Sciences, 2010).
- [3] F. R. Halpern, *Special Relativity and Quantum Mechanics* (Prentice-Hall, 1968).
- [4] E. Schrödinger, *Space-Time Structure* (Cambridge University Press, 1950).
- [5] J. L. Anderson, *Principles of Relativity Physics* (Academic Press, 1967).
- [6] A. S. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*, 2^e éd. (Cambridge University Press, 1930).

14. Cette loi est dérivée sans faire appel à l'invariance de dans les livres de Schrödinger [4] et d'Eddington [6], par exemple. Ces derniers partent de la loi (11) et utilisent les équations gravitationnelles pour transformer son second terme.