

Partie V. Théories sur la nature des particules élémentaires chargées

p. 184

63. L'électron et la théorie de la relativité restreinte

Pendant longtemps, des efforts ont été faits pour obtenir toutes les propriétés mécaniques de l'électron à partir de principes électromagnétiques. Dans un tel cas, l'équation de mouvement

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{K} \quad (463)$$

(où $\mathbf{G}$ = moment de l'électron [commenter éventuellement la différence entre impulsion et quantité de mouvement ou adhérer à la forme anglaise moment dynamique versus moment canonique], $\mathbf{K}$ = force *extérieure*) est interprétée comme suit³⁷⁴ : on postule tout d'abord que toutes les forces agissant sur l'électron sont d'origine électromagnétique, c'est-à-dire qu'elles sont données par l'expression de Lorentz (212a) [215 dans l'édition allemande, corrigé à la traduction anglaise]; ensuite que la force totale agissant sur un électron doit toujours s'annuler,

$$\int \rho \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}) \right\} dV = 0, \quad (464)$$

[décision à prendre au sujet des accolades] où l'intégration porte sur le volume de l'électron. Cette force totale peut être séparée en deux termes. L'un est la force due au champ extérieur

$$\int \rho \left\{ \mathbf{E}^{\text{ext}} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}^{\text{ext}}) \right\} dV = \mathbf{K}$$

qui agit dans le membre de droite de (463). L'autre est la force exercée par l'électron sur lui-même, que l'on peut rendre égale à

$$\int \rho \left\{ \mathbf{E}^{\text{int}} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}^{\text{int}}) \right\} dV = -\frac{d\mathbf{G}}{dt}.$$

Dans cette expression, $\mathbf{G}$ est interprété comme le moment électromagnétique du champ propre de l'électron [Lire Abraham, Rorhlich, Feynman]. Pour des accélérations pas trop importantes (mouvement quasi-stationnaire), il peut être considéré comme le moment correspondant à un mouvement uniforme de l'électron avec la vitesse instantanée correspondante. Il dépend bien sûr de la distribution de charge à l'intérieur de l'électron.

L'hypothèse la plus naturelle qui se présentait était celle d'un électron parfaitement rigide. Une telle théorie a été élaborée de manière complète par Abraham³⁷⁵. Cependant, en

³⁷⁴Cf. note de bas de page 4, p. 1, H. A. Lorentz, *ibid.*, § 21.

³⁷⁵M. Abraham, *Ann. Phys., Lpz.*, **10** (1903) 105. Voir aussi la note de bas de page 4, p. 1, H. A. Lorentz, *ibid.*, § 21.

1904, H. A. Lorentz³⁷⁶ a montré que les déductions que l'on pouvait tirer de la dépendance en fonction de la vitesse du moment de l'électron ne seraient en accord avec le principe de relativité que si l'on suppose qu'une contraction de l'électron opère dans la direction du mouvement, dans un rapport $\sqrt{1-\beta^2} : 1$. Et Einstein³⁷⁷ a ensuite montré que les dépendances de la masse, de l'énergie et du moment en fonction de la vitesse découlent du seul principe de relativité, sans recours à d'autres hypothèses sur la nature de l'électron (cf. § 29). Par conséquent, en retour, on ne peut déduire d'observations sur le changement de masse aucune information sur la nature de l'électron.

Il est cependant facile de voir que le principe de relativité doit nécessairement conduire à l'existence d'une énergie de nature autre qu'électromagnétique pour l'électron, du moins tant que la théorie de Maxwell-Lorentz est retenue. Cela a tout d'abord été remarqué par Abraham³⁷⁸. Supposons tout d'abord que la distribution de charge dans un électron stationnaire est à symétrie sphérique. On obtient alors l'énergie et le moment d'un électron en mouvement par (351), si ces quantités sont bien d'origine électromagnétique et données par les expressions de Maxwell-Lorentz,

$$\mathbf{G} = \mathbf{u} \frac{\frac{4}{3}(E_0/c^2)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E = \frac{E_0(1 + \frac{1}{3}u^2/c^2)}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (351)$$

Si ces expressions représentaient bien l'énergie totale et le moment, nous aurions, à partir de (317), (318),

$$E = \int \left(\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{G}}{dt} \right) dt = \int \left(\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{G}}{d\beta} \right) d\beta.$$

Ce n'est toutefois pas le cas. L'intégrale dans le terme de droite prend en effet la valeur

$$\frac{\frac{4}{3}E_0}{\sqrt{1-\beta^2}} + \text{const.}$$

Si, au contraire de l'énergie, le *moment* est supposé de nature purement électromagnétique, les énergies totales, $\bar{E}_0$ et $\bar{E}$ respectivement, d'un électron stationnaire et en mouvement, ainsi que sa masse au repos, deviennent

$$\bar{E} = \frac{\bar{E}_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \bar{E}_0 = \frac{4}{3}E_0, \quad m_0 = \frac{\bar{E}_0}{c^2} = \frac{4}{3} \frac{E_0}{c^2}. \quad (465)$$

La masse au repos m_0 est ici définie par

$$\mathbf{G} = \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Ces relations sont en accord avec le théorème de l'inertie de l'énergie, comme il est requis (on a fixé la constante additive dans $\bar{E}$ de manière à se conformer à ce théorème). *L'énergie totale de l'électron stationnaire est alors égale aux quatre tiers de son énergie électromagnétique telle que donnée par Lorentz.*

Il semblerait alors que l'électron rigide de la théorie "absolue" soit compatible avec une représentation purement électromagnétique du monde (ou plutôt, avec la représentation particulière du monde fondée sur la théorie de Maxwell-Lorentz), au contraire de l'électron tel que demandé par la théorie de la relativité. Mais cela n'est pas correct pour la raison suivante : l'hypothèse d'un électron rigide est un concept totalement étranger à l'électrodynamique. Sans elle, nous n'aurions pas eu seulement à postuler que la force *totale* (464)

³⁷⁶ Cf. note de bas de page 10, p. 2, *Versl. gewone Vergad. Akad. loc. cit.*

³⁷⁷ Cf. note de bas de page 12, p. 2, *ibid.*, § 10.

³⁷⁸ M. Abraham, *Phys. Z.*, **5** (1904) 576 : *Theorie der Elektrizität*, Vol. 2, (1st edn., Leipzig 1905), p. 205.

agissant sur l'électron devait s'annuler, mais plutôt que c'est la cas pour la force agissant sur chaque point individuel,

$$\rho \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}) \right\} = 0.$$

Il est clair qu'une charge stationnaire ($\mathbf{v} = 0$) est incompatible avec ce postulat, car il en résulterait $\rho = 0$ (notons que $\text{div } \mathbf{E} = \rho$). Ainsi, *l'électrodynamique de Maxwell-Lorentz apparaît totalement incompatible avec l'existence de charges, sauf à la compléter par des éléments théoriques qui lui sont étrangers*. D'un point de vue purement électromagnétique l'électron de la théorie "absolue" n'est ainsi vraiment pas plus satisfaisant que celui de la relativité. En tout état de cause, il sera nécessaire d'introduire des forces qui équilibrent les forces répulsives de Coulomb de la charge de l'électron sur elle-même. De telles forces ne peuvent pas résulter de l'électrodynamique de Maxwell-Lorentz. Poincaré³⁷⁹ a déjà reconnu cette nécessité et a introduit de manière purement formelle une pression scalaire de cohésion, p , sur la nature de laquelle il n'a fait aucune affirmation. D'un point de vue général, le problème de l'électron doit être formulé de la manière suivante : le tenseur énergie-impulsion S_{ik} de l'électrodynamique de Maxwell-Lorentz doit être complété par des termes additionnels afin que les lois de conservation

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0 \quad (341)$$

pour le tenseur énergie-impulsion total deviennent compatible avec l'existence de charges. Ces termes additionnels vont certainement dépendre de quantités physiques déterminées de manière causale par des équations différentielles. (Dans le paragraphe 42, nous avons posé l'"Ansatz" phénoménologique $\mu_0 u_i u_k$ pour le tenseur énergie d'un électron isolé.) Nous discuterons dans les paragraphes 65 et 66 de l'ampleur des modifications à apporter à cette formulation en théorie *générale* de la relativité.

Nous sommes maintenant en mesure de répondre à un point litigieux soulevé par Ehrenfest³⁸⁰ : un mouvement de translation uniforme en l'absence de force, est-il bien possible dans toute direction pour un électron qui, même au repos, ne serait pas de symétrie sphérique. Dans un tel cas, le moment électromagnétique de l'électron en mouvement ne serait pas toujours dans la direction de sa vitesse et les forces électromagnétiques exerceraient alors un couple sur l'électron. Laue³⁸¹ a remarqué que cette situation est parfaitement analogue à celle de l'expérience de Trouton et Noble. Dans cette expérience, le couple électromagnétique est compensé par un couple engendré par le courant d'énergie élastique. [Bosser sur Trouton et Noble] Dans notre cas, l'effet de compensation est dû de manière analogue à un courant d'énergie représenté par les termes additionnels dans le tenseur énergie impulsion mentionnés précédemment. L'introduction de tels termes additionnels devient nécessaire non seulement dans le cas de l'électron en mouvement, mais également dans celui de l'électron stationnaire. Il doit donc être répondu par l'affirmative à la question d'Ehrenfest. p. 187

Nous devons encore discuter des *dimensions* de l'électron, tant du point de vue théorique envisagé ci-dessus que du point de vue expérimental. *Expérimentalement*, on sait avec un degré de probabilité élevé qu'en dernière analyse toute forme de matière consiste en noyaux d'hydrogène et en électrons. *Naturellement, toutes les affirmations précédentes à propos de l'électron valent également pour le noyau d'hydrogène*. L'expérience nous a seulement enseigné que les dimensions de ces particules sont certainement inférieures à

³⁷⁹Cf. note de bas de page 11, p. 2, *R.C. Circ. mat. Palermo., loc. cit.*

³⁸⁰P. Ehrenfest, *Ann. Phys., Lpz.*, **23** (1907) 204 : remarques à ce propos par A. Einstein, *Ann. Phys., Lpz.*, **23** (1907) 206.

³⁸¹Cf. note de bas de page 240, p. 129, *ibid.*

10^{-13} cm. En d'autres termes, pour ce qui concerne les forces qu'elles exercent l'une sur l'autre, deux telles particules se comporteront à distance pratiquement comme des charges ponctuelles. L'éventualité que les dimensions de ces particules soit bien plus petite que 10^{-13} cm n'est jusqu'à présent pas exclue par les expériences réalisées. *Théoriquement*, du point de vue de Lorentz, des affirmations définitives ne peuvent être faites que de la manière suivante : une sphère de rayon a chargée uniformément en surface a pour énergie

$$E = \frac{e^2}{8\pi a},$$

où e est la charge totale, mesurée en unités de Heaviside [discuter les unités de mesure]. Il résulte de (465) que

$$m_0 = \frac{e^2}{6\pi a c^2}, \quad a = \frac{e^2}{6\pi m_0 c^2}. \quad (466)$$

Une modification de la distribution de charge ne changerait que le facteur numérique, mais pas l'ordre de grandeur de a . La valeur de a est obtenue à partir de celles, connues, des masses au repos de l'électron et du noyau d'hydrogène. Pour le premier, le rayon a est de l'ordre de 10^{-13} cm et pour le second environ 1800 fois plus petit, en rapport avec sa masse plus importante. [Commenter calcul classique ici, donc l'ordre des tailles contraire à la réalité] Mais il faut remarquer que cette considération repose sur des fondements théoriques très fragiles. En effet, elle est fondée comme nous l'avons vu sur les hypothèses suivantes :

1. La distribution de charges d'un électron au repos (noyau d'hydrogène) est à symétrie sphérique.
2. Le moment total d'un électron en mouvement (noyau d'hydrogène) est donné par l'expression

$$\mathbf{G} = \frac{1}{c} \int \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} dV$$

de la théorie de Maxwell-Lorentz ; celle-ci est donc supposé également valable pour des concentrations les plus extrêmes de charges et de champs.

p. 188 La seconde hypothèse en particulier apparaît douteuse. En aucune manière les données expérimentales disponibles à ce jour ne donnent une base empirique aux dimensions ainsi calculées, en particulier pour l'affirmation théorique que le rayon du noyau d'hydrogène doit être significativement plus petit que celui de l'électron^{381a}.

64. La théorie de Mie

La première tentative pour construire une théorie susceptible de tenir compte de l'existence de particules élémentaires chargées électriquement a été élaborée par Mie³⁸². Il s'est proposé de généraliser les équations de champ et le tenseur énergie-impulsion de la théorie de Maxwell-Lorentz de sorte que d'une part les forces répulsives de Coulomb à l'intérieur des particules élémentaires chargées soient maintenues en équilibre par d'autres forces, également de nature électrique, et d'autre part que les déviations à l'électrodynamique ordinaire restent indétectables dans les régions hors des particules.

^{381a} Sur ce point, on ne peut pas être en accord avec le point de vue présenté dans le livre de M. Born, *Die Relativitätstheorie Einsteins* (Berlin 1920), p.192. [Aller lire Born et commenter]

³⁸² G. Mie, 'Grundlagen einer Theorie des Materie', *Ann. Phys. Lpz.*, **37** (1912) 511 ; **39** (1912) ; **40** (1913) 1. Cf. aussi la version par M. Born, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, (1914) 23, qui met en évidence l'analogie entre la démonstration de la loi de l'énergie-impulsion [Conservation du tenseur énergie-contrainte probablement] à partir du principe variationnel de la théorie de Mie et la démonstration de la loi de conservation de l'énergie à partir du principe d'Hamilton en mécanique ordinaire. Voir aussi H. Weyl, *Raum-Zeit-Materie*

Mie conserve le premier groupe d'équations de Maxwell

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0, \quad (203)$$

duquel découle l'existence d'un quadripotentiel,

$$F_{ik} = \frac{\partial \phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \phi_i}{\partial x^k} \quad (206)$$

(cf. paragraphe 28). De plus la quadridensité de courant devra satisfaire l'équation de continuité

$$\frac{\partial s^k}{\partial x^k} = 0. \quad (197)$$

Il s'ensuit l'existence d'un tenseur antisymétrique de rang 2, $H^{ik} = -H^{ki}$, satisfaisant l'équation

$$s^i = \frac{\partial H^{ik}}{\partial x^k}. \quad (467)$$

Ici, H^{ik} réunit les deux vecteurs $\mathbf{D}$ et $\mathbf{H}$, tout comme F_{ik} réunit les vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$. On voit ainsi que pour $H^{ik} = F^{ik}$, les équations se réduisent à celles de l'électrodynamique ordinaire et qu'elles sont formellement conforme à celles de l'électrodynamique phénoménologique des corps pondérables.

Maintenant cependant, les lois du champ acquièrent un nouveau contenu physique en vertu de l'hypothèse suivante, décisive : *Les vecteurs H^{ik} et s^k doivent être des fonctions universelles de F_{ik} et φ_i ,*

$$H^{ik} = u_{ik}(\mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi}), \quad s^k = v_k(\mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi}). \quad (467a)$$

[Commentaire : version allemande avec ambiguïté car pas de majuscule, version anglaise lourdingue, et en plus commenter les indices du second membre qui ne sont pas des covariants mais des labels.] Les six premières relations diffèrent essentiellement de celles de l'électrodynamique phénoménologique en ce que H^{ik} dépend aussi explicitement de φ_i . Dans la théorie de Mie, ce n'est pas seulement la différence de potentiel, mais le potentiel dans l'absolu qui acquiert une signification réelle ⁽¹⁾. Les équations ne restent pas inchangées si l'on remplace $\boldsymbol{\varphi}$ par $\boldsymbol{\varphi} + \text{const}$. Nous verrons plus tard que cette particularité de la théorie de Mie conduit à de sérieuses difficultés. Les quatre dernières équations (467a) sont essentielles pour l'existence des particules matérielles (électron et noyau d'hydrogène) et les lois de leur mouvement. [Si la charge dépend du φ , changer par une constante le potentiel change la charge.] Mie dénomme, plus ou moins arbitrairement, φ_i et F_{ik} "*grandeurs d'intensité*" et s^k et H^{ik} "*grandeurs de quantité*". [Citer Mie 1912 p 3 fin du premier paragraphe.]

p. 189

Au moyen de (467a), pas moins de dix fonctions universelles sont introduites dans la théorie. Cependant, comme Mie l'a trouvé, le principe de l'énergie apporte une grande simplification, qui permet de réduire les dix fonctions universelles inconnues à une seule. En effet on voit qu'une équation de la forme

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div } \mathbf{S} = 0$$

(W = densité d'énergie, $\mathbf{S}$ = courant d'énergie)

(1ère édition, 1918) § 25, p. 165 ; (3ème édition, 1920) §25, p. 175.

ne peut être déduite de (206) et (467), que lorsqu'il existe un invariant $L(\mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi})$ (vis-à-vis du groupe de Lorentz [il ne s'agit d'invariance par transformation de jauge ici d'où la précision du texte allemand avec le *zunächst*]) duquel H^{ik} et s^i puissent être obtenus par différentiation,

$$H^{ik} = \frac{\partial L}{\partial F_{ik}}, \quad s^i = -\frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial \varphi_i}, \quad (468)$$

de sorte que (2)

$$\delta L = H^{ik} \delta F_{ik} - 2s^i \delta \varphi_i. \quad (468a)$$

[457 ds la version anglaise par erreur et 467 ds la version originale] Un calcul simple montre ensuite que l'équation (467) découle du principe d'action

$$\delta \int L d\Sigma = 0, \quad (469)$$

si la variation remplit les conditions (206) pour le champ objet de la variation.

.....

On peut faire un certain nombre d'affirmations générales sur l'invariant L , qui est souvent appelé fonction d'univers [world function]. En premier lieu, les seuls invariants que l'on peut former à partir du tenseur antisymétrique F_{ik} et du vecteur φ_i sont les suivants :

- (1) Le carré du tenseur $F_{ik} : \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik}$.
- (2) Le carré du vecteur $\varphi_i : \varphi_i \varphi^i$.
- (3) Le carré du vecteur $F_{ik} \varphi^k : F_{ir} \varphi^s F^{is} \varphi^r$.
- (4) Le carré du vecteur $F_{ik}^* \varphi^k$ ou, ce qui revient au même, le carré du tenseur $F_{ik} \varphi_l + F_{li} \varphi_k + F_{kl} \varphi_i$.

[20] L doit donc être une fonction de ces quatre invariants.

p. 190 Si L est égal au premier de ces invariants, les équations de la théorie de Mie dégèrèrent en les [redonnent] équations ordinaires de la théorie de l'électron [Titre de l'article de Poincaré et 1905 ?] pour l'espace libre de charges. Ainsi, L doit être significativement différent de $\frac{1}{2} F_{ik} F^{ik}$ à l'intérieur des particules matérielles. On ne peut rien dire de plus de la fonction d'univers L . Il est impossible de limiter le nombre d'alternatives à un point tel qu'il devienne possible de définir une fonction d'univers sans ambiguïté.

On doit ensuite déterminer le tenseur énergie-impulsion T_{ik} en fonction des champs. Hilber³⁸³ et Weyl³⁸⁴ ont montré que les calculs correspondants peuvent être considérablement simplifiés en écrivant les équations dans les notations de la théorie générale de la relativité et en utilisant ensuite la méthode de variation des g_{ik} qui a été introduite au § 55. Alors seulement, les connexions formelles deviennent clairement apparentes. Nous avons préparé le terrain pour cela dans notre choix de notations dans les formules précédentes et différons en cela de Mie qui a bien entendu basé ses articles de 1912 et 1913 sur la théorie de la relativité restreinte. Tout d'abord, tout comme dans le cas de l'électrodynamique ordinaire traité au § 54, l'ensemble d'équations (203), (??) reste valable aussi pour un champ G arbitraire. En revanche, (197) et (467) doivent être remplacées par

$$\frac{\partial s^i}{\partial x^i} = 0 \quad (197a)$$

³⁸³ Cf. note de bas de page 99, p. 63, *ibid.*, I.

³⁸⁴ H. Weyl, *Raum-Zeit-Materie* (1ère édition [fixer les abréviations edn., Eq., ...], 1918), p. 184 *et seq.*; (3ème édition, 1920), p. 199.

$$s^i = \frac{\partial \mathfrak{H}^{ik}}{\partial x^k} \quad (467b)$$

Comme cela a été remarqué par Weyl, les “quantités intensives” apparaissent ici comme des *densités* tensorielles (i.e. multipliées par $\sqrt{(-g)}$), alors que les “quantités extensives” restent des tenseurs ordinaires. De même, les relations (468), (468a) et le principe d’Hamilton (469) restent valables et ce dernier peut bien entendu s’écrire également sous la forme

$$\delta \int \mathfrak{L} dx = 0. \quad (469a)$$

Pour obtenir la tenseur énergie T_{ik} , on doit seulement déterminer la variation de l’action obtenue en variant le champ $-G$. Comme dans ce cas L est indépendant des dérivées des g_{ik} , la relation suivante est valable si le champ électromagnétique est maintenu constant,

$$\delta \mathfrak{L} = \mathfrak{T}_{ik} \delta g^{ik}$$

de sorte que

$$T_{ik} = \frac{\partial L}{\partial g^{ik}} - \frac{1}{2} L g_{ik}, \quad T_i{}^k = \frac{\partial L}{\partial g^{ir}} g^{rk} - \frac{1}{2} L \delta_i{}^k. \quad (470)$$

Si d’autre part on substitue dans l’expression générale

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial g^{ik}} \delta g^{ik} + H^{ik} \delta F_{ik} - 2s^i \delta \varphi_i$$

résultant de (468a), une variation des champs produite par une transformation infinitésimale de coordonnées (comme celle donnée par (??), (??)), δL doit s’annuler identiquement. En d’autres termes, p. 191

$$2 \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \left(\frac{\partial L}{\partial g^{ir}} g^{rk} - H^{kr} F_{ir} + s^k \varphi_i \right) \equiv 0,$$

qui n’est possible que si le crochet lui-même s’annule identiquement. Finalement on peut en déduire la valeur de $\frac{\partial L}{\partial g^{ir}} g^{rk}$ et la substituer dans (470). On obtient ainsi

$$T_i{}^k = H^{kr} F_{ir} - s^k \varphi_i - \frac{1}{2} L \delta_i{}^k. \quad (470a)$$

On voit de ce calcul que les composantes covariantes correspondantes T_{ik} sont symétriques. Sur la base des résultats du § 55, on peut voir de plus que la loi de l’énergie-impulsion est une conséquence des équations du champ ⁽³⁾ En l’absence de champ gravitationnel, elle est de la forme

$$\frac{\partial T_i{}^k}{\partial x^k} = 0, \quad (341)$$

et en présence de champ gravitationnel,,

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_i{}^k}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \mathfrak{T}^{rs} \frac{\partial g^{rs}}{\partial x^i} = 0. \quad (341a)$$

L’expression (470a) pour le tenseur énergie-impulsion est identique à celle obtenue par Mie par un calcul direct.

Considérons maintenant une nouvelle fois le problème des équations du mouvement et s’il est possible pour des particules matérielles d’exister. En électrodynamique ordinaire,

l'intensité du champ électrique est définie comme la force agissant sur une charge (stationnaire). Cette conception simple de l'intensité du champ ne s'applique plus à l'intérieur d'une particule matérielle dans la théorie de Mie. En effet, la force pondéromotrice est partout égale à zéro. Cependant [règles de symboles de ponctuation en Fr. derrière cependant, en effet, etc] la signification pratique de charge totale d'une particule subsiste. Pour cela considérons un eparticule chargée dans un champ extérieur. Dans ce cas, il découle de (341) que

$$\frac{d}{dx^4} \int T_i^4 dx^1 dx^2 dx^3 = - \int T_i^k n_k d\sigma. \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

(n_k = unitaire normal à la surface)

La seconde intégrale est prise sur une surface suffisamment éloignée de la particule matérielle. Comme l'électrodynamique ordinaire est valable sur cette surface, l'intégrale de surface y a la même valeur qu'ici, i.e. elle représente la force de Lorentz. Nous avons donc donné une preuve électrodynamique de l'équation de mouvement (??) d'un électron dans le contexte de la théorie de Mie. Dans le même temps, on voit que la masse au repos de la particule est déterminée par

$$m_0 = \frac{E_0}{c^2} = - \int T_4^4 dx^1 dx^2 dx^3, \quad (471)$$

p. 192 en accord avec le théorème de l'inertie de l'énergie. Pour T_4^4 , on doit substituer l'expression obtenue à l'aide de (470).

Mie suppose que le champ d'une électron stationnaire est statique et à symétrie sphérique. Comme cela a été expliqué à la section précédente, on doit admettre que cette dernière hypothèse n'est pas justifiée par notre savoir expérimental seul, mais s'impose d'elle-même pour sa simplicité. Nous aurons donc à chercher les solutions du champ qui sont régulières partout – pour $r = 0$ aussi bien que pour $r = \infty$ [$r \rightarrow \infty$]. Une fonction d'univers qui correspond à la réalité devra conduire à une et seulement une solution pour chaque type d'électricité [L'électron et le noyau d'hydrogène, soit plus ou moins la même valeur de la charge]. Il n'a pas été possible jusqu'à présent de proposer une fonction d'univers qui satisfasse ce critère [cette condition]. Au contraire, les fonctions d'essai pour L discutées jusqu'à présent conduisent à la conclusion, en contradiction avec l'expérience, que des particules élémentaires avec des valeurs arbitraires de la charge totale peuvent exister. Ceci en soi n'est pas une raison pour abandonner la théorie de Mie car il n'a pas été prouvé qu'il ne pouvait pas exister de fonction d'univers compatible avec l'existence de certaines particules élémentaires [seulement].

Une difficulté bien plus sérieuse nous-semble-t-il est due à un fait déjà remarqué par Mie. Une fois qu'on a trouvé une solution pour le potentiel électrostatique ϕ pour une particule matérielle d'un type requis, $\phi + \text{const.}$ est une autre solution, parce que les équations du champ de Mie contiennent la valeur absolue du potentiel. Une particule matérielle ne peut donc pas exister dans un potentiel externe constant. Ceci nous semble-t-il constitue un argument de poids à l'encontre de la théorie de Mie. Dans les théories que nous allons discuter dans les sections suivantes, on ne rencontre pas ce type de difficulté.

[21] Une tentative de Weyl doit être mentionnée ici, dans laquelle il essaie de rendre compréhensible l'asymétrie des deux formes d'électricité du point de vue de la théorie de Mie. Si la fonction d'univers L n'est pas une fonction rationnelle de $\sqrt{(-\varphi_i \varphi^i)}$, on peut poser

$$L = \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik} + w(+\sqrt{(-\varphi_i \varphi^i)}) \quad \text{pour } \varphi_i \varphi^i < 0, \varphi_4 > 0$$

et

$$L = \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik} + w(-\sqrt{(-\varphi_i \varphi^i)}) \quad \text{pour } \varphi_i \varphi^i < 0, \varphi_4 < 0$$

où w est une fonction non impaire quelconque. Dans le cas statique, les équations du champ ne resteront pas invariantes dans l'échange de ϕ en $-\phi$ (électricité positive et négative). Très généralement, si L est une fonction multivaluée des quatre invariants fondamentaux indiqués plus haut, il est possible de choisir l'une de ses branches comme fonction d'univers pour l'électricité positive et une autre pour l'électricité négative. Nous reviendrons sur cette possibilité au § 67.

65. La théorie de Weyl

[22]

Dans une série d'articles³⁸⁵ a développé une théorie extrêmement profonde, [qui est] basée sur une généralisation de la géométrie de Riemann et qui prétend [cherche à] inter- p. 193
préter tous les événements physiques en termes de gravitation et d'électromagnétisme et cela en dernier ressort ??? [in turn] en termes de métrique d'Univers. La structure de base de cette théorie et les résultats obtenus à ce jour seront discutés à cet endroit [junction] parce que la théorie a aussi certaines affirmations sur la nature des particules matérielles.

(α) *Géométrie infinitésimale pure. Invariance de jauge* [Eichinvarianz, discuter ici l'évolution de la terminologie avant qu'elle ne se fixe : "Weyl's papers on physics were rambling, discursive and philosophical. They were also extraordinarily original. He was exploring new ideas, so there was great fluidity in his style. He frequently changed names for key concepts. Proportionalität later became Strecke, so that when Schrödinger in 1922 referred to the Proportionalitätsfaktor, it became Streckenfaktor (see Yang Ref. 146). When the concept of gauge invariance first came up, he called it Masstab-Invarianz. But later he settled on Eichinvarianz. English translation of this term is now gauge invariance, but had been at times calibration invariance and measure invariance." (A.C.T. Wu and C.N. Yang, Int. J. Mod. Phys. A, **21** (2006) 3235)]. [Numérotation en lettres latines dans la version allemande] La transition [Le passage] de la géométrie euclidienne à la riemanienne a été vu dans la partie II comme réalisée en relaxant l'hypothèse que le transfert [transference] de la direction d'un vecteur d'un point P à un point P' est indépendant du chemin suivi. Weyl franchit un pas de plus en autorisant de même un dépendance en fonction du chemin du transfert de longueur. Il sera donc uniquement possible de comparer des longueurs mesurées *en un même point* de l'espace [world point], mais pas en des points différents [Commenter ici les arguments de Fr. Chargois sur le fait que c'est finalement l'essence de la géométrie grecque et que Weyl revient aux sources mêmes de la géométrie.]. En d'autres termes, on peut seulement déterminer des relations entre les g_{ik} grâce à des mesures, mais pas les quantités elles-mêmes. Supposons tout d'abord des valeurs arbitraires (continues) absolues pour les g_{ik} et définissons

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

comme le carré de la longueur d'une règle [measuring rod], où les dx^i sont les différences de coordonnées de ses points extrêmes. (Par souci de brièveté, nous parlons ici et dans ce qui suit en termes de règles, mais les mêmes arguments s'appliquent bien sûr à la période d'une horloge dans le cas d'un élément de longueur du genre temps). Si maintenant la règle est déplacée le long d'un [cut ?] défini $x^i = x^i(t)$ d'un point $P(t)$ à un point $P(t+dt)$, le carré de la longueur $ds^2 = l$ sera alors changé. Nous allons admettre comme axiome qu'il sera toujours changé d'une fraction définie de l ,

$$\frac{dl}{dt} = -l \frac{d\varphi}{dt} \quad (472)$$

où φ est une certaine fonction de t et est indépendante de l . On introduit comme second axiome que $d\varphi/dt$ dépend uniquement des dérivées premières des coordonnées, dx^i/dt .

³⁸⁵ H. Weyl, *S.B. preuss. Akad. Wiss.* (1918) 465; *Math. Z.* **2** (1918) 384; *Ann. Phys., Lpz.*, **59** (1919) 101 :

Comme de plus l'équation (472) doit être valable pour un choix arbitraire du paramètre t , $d\varphi/dt$ doit être une fonction homogène du premier degré des dx^i/dt . Cette fonction peut encore être spécifiée davantage au moyen du concept de transport parallèle qui a été discuté au §14. Ce concept y a été défini par deux conditions : la première affirmait que les composantes d'un vecteur resteraient inchangées pour un déplacement parallèle infinitésimal dans un système de coordonnées convenablement choisis, là où la seconde exprimait le fait que la longueur d'un vecteur resterait non altérée durant le transport parallèle. La première hypothèse peut être retenue inchangée ; elle conduit à l'expression (64) pour le changement des composantes du vecteur,

$$\frac{d\xi^i}{dt} = -\Gamma_{rs}^i \frac{dx^s}{dt} \xi^r \quad (64)$$

avec

$$\Gamma_{rs}^i = \Gamma_{sr}^i \quad (65)$$

p. 194 La seconde hypothèse en revanche perd son sens ici, parce que les longueurs de deux vecteurs en des points différents ne peuvent plus être comparées. A sa place, cette hypothèse doit être remplacée par la condition que les longueurs doivent changer selon (472),

$$\frac{d}{dt}(g_{ik}\xi^i\xi^k) = \frac{d}{dt}(\xi_i\xi^i) = -g_{ik}\xi^i\xi^k \frac{d\varphi}{dt}, \quad (473)$$

pour un déplacement parallèle. En substituant (64), il s'ensuit tout d'abord que $d\varphi/dt$ doit être une forme linéaire de dx^i/dt ,

$$d\varphi = \varphi_i dx^i. \quad (474)$$

Le déplacement parallèle est possible uniquement à cette condition. De plus, de

$$\Gamma_{irs} = g_{ik}\Gamma_{rs}^k, \quad \Gamma_{rs}^i = g^{ik}\Gamma_{krs}, \quad (66)$$

on déduit que

$$\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^s} + g_{ir}\varphi_s = \Gamma_{irs} + \Gamma_{ris} \quad (475)$$

[Remarque sur la notation avec virgule maintenant réservée aux dérivées.] Les composantes géodésiques [??] de la géométrie de Weyl sont donc différentes de celles de Riemann. Nous noterons toujours à l'aide d'une astérisque les quantités de la géométrie riemannienne. Elles se réduisent à celles de la géométrie de Weyl lorsque $\varphi_i = 0$ [C'est le contraire, celles de Weyl se réduisent à celles de Riemann dans ce cas. Donc reformuler ou écrire que celle de Riemann correspondent à celles de Riemann si $\varphi_i = 0$ mais on perd l'avantage de voir que Weyl est une généralisation. Je préférerais reformuler!] Ainsi, si les quantités (??) sont notées Γ_{irs}^* , alors

$$\Gamma_{irs} = \Gamma_{irs}^* + \frac{1}{2}(g_{ir}\varphi_s + g_{is}\varphi_r - g_{rs}\varphi_i). \quad (476)$$

On a fixé les valeurs absolues de g_{ik} [très] arbitrairement. A la place du jeu de valeurs g_{ik} , on aurait tout aussi bien pu utiliser l'ensemble de valeurs λg_{ik} , où λ est une fonction arbitraire de la position. Tous les éléments de longueur auraient dans ce cas dû être multipliés par

Raum-Zeit-Materie, (3rd edn., 1920), Chaps. II and IV, §§34 and 35, p. 242 et seq. ; *Phys. Z.*, **21** (1920) 649.

λ et à cause de (472), nous aurions trouvé l'ensemble de valeurs

$$\varphi_i - \frac{\partial \ln \lambda}{\partial x^i} = \varphi_i - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x^i},$$

à la place de φ_i . Fixer la facteur λ , la jauge dans la géométrie de Weyl va de pair avec le choix des coordonnées dans la géométrie de Riemann. *Tout comme nous avons supposé l'invariance de toutes les relations géométriques et des lois physiques dans un changement arbitraire des coordonnées, nous avons maintenant à postuler en plus leur invariance vis-à-vis des substitutions*

$$\bar{g}_{ik} = \lambda g_{ik}, \quad \bar{\varphi}_i = \varphi_i - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x^i}, \quad (477)$$

c.-à-d. par rapport aux changements de la jauge (invariance de jauge).

(β) *Champ électromagnétique et métrique d'Univers.* De (472), il s'ensuit par intégration que

p. 195

$$\begin{aligned} \ln l_{P'} &= - \int_P^{P'} \varphi_i dx^i, \\ l_{P'} &= l_P \exp \left\{ - \int_P^{P'} \varphi_i dx^i \right\}. \end{aligned} \quad (478)$$

Quand la forme linéaire $\varphi_i dx^i$ est une différentielle totale, la longueur d'un vecteur devient indépendante de la trajectoire le long de laquelle il est transféré et on revient au cas riemannien. La condition nécessaire et suffisante pour cela est l'annulation des expressions

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k}. \quad (479)$$

On voit à l'aide de (477) que dans ce cas le vecteur φ_i peut toujours être rendu nul par un choix convenable de la jauge. Dans le cas général cependant, les quantités F_{ik} seront différentes de zéro. Elles forment donc les composantes covariantes d'un tenseur antisymétrique de rang 2, qui de plus reste inchangé dans un changement de jauge, en raison de (477). De plus elles satisfont aux équations

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0, \quad (480)$$

qui découlent de (479). Nous voyons que les équations (479) et (480) ont exactement la même forme que les équations (206) et (203) de la théorie de l'électron. Mais l'analogie peut être menée plus avant. Si l'on prend le point de vue (contrairement aux hypothèses de la théorie de Mie) que les phénomènes électromagnétiques sont déterminés de manière première par les changements dans l'espace et le temps des intensités des champs seuls, et que les potentiels sont en revanche vus comme des quantités mathématiques auxiliaires, alors les valeurs des potentiels qui conduisent aux mêmes intensités des champs [trouver une traduction de field strength] sont physiquement complètement équivalentes ; ainsi un gradient $\partial \psi / \partial x^i$ reste indéterminé dans les φ_i . Mais, ainsi qu'on la vu, le même raisonnement s'applique exactement au vecteur métrique φ_i . Suivant Weyl, nous sommes ainsi conduits à identifier les deux jeux de quantités φ_i, F_{ik} : *le vecteur métrique φ_i qui détermine le comportement des longueurs selon (478), doit être identique au quadri-potential électromagnétique (à un facteur numérique près).* Tout comme les effets gravitationnels dans la théorie d'Einstein sont intimement liés au comportement des règles et horloges de mesure, de sorte qu'elles s'en déduisent sans ambiguïté, la même chose vaut pour les

effets électromagnétiques dans la théorie de Weyl. Dans ce sens, à la fois la gravitation et l'électricité apparaissent comme des conséquences de la métrique d'Univers dans cette théorie.

Ce point de vue a été modifié [subséquent] par Weyl car les hypothèses de base de la théorie dans sa forme originale conduisent à des déductions qui semblent en contradiction avec l'expérience. Cela a été discuté par Einstein.³⁸⁶ Pensons à un champ électrostatique p. 196 connecté à un G-champ statique [un champ de gravitation]. Les composantes spatiales ϕ_i ($i = 1, 2, 3$) s'annulent et la composante temporelle $\phi_4 = \varphi$ de même que les g_{ik} sont indépendantes du temps. La jauge est alors fixée à facteur *constant* près. Si l'on applique la relation (478) à la période d'une horloge stationnaire, il s'ensuit directement que

$$\tau = \tau_0 e^{\alpha \varphi t}, \quad (481)$$

où α est un facteur de proportionnalité. La signification de cette équation est la suivante : considérons deux horloges identiques, C_1 et C_2 , battant le même rythme, placées tout d'abord au point P_1 dans un potentiel électrostatique φ_1 . Menons ensuite l'horloge C_2 en un point P_2 dans un potentiel φ_2 pendant t secondes pour la ramener ensuite en P_1 . Il en résultera que le rythme de l'horloge C_2 , comparé à celui de l'horloge C_1 , sera augmenté ou diminué d'un facteur $\exp[-\alpha(\varphi_2 - \varphi_1)t]$ (selon le signe de α et de la différence $\varphi_2 - \varphi_1$). Cet effet devrait en particulier être notable dans les lignes spectrales d'une substance donnée, des lignes spectrales de fréquences définies ne pouvant pas exister, car, si petit que soit choisi α , les différences augmenteraient indéfiniment au cours du temps selon (481) [Estimer ici la valeur de α pour que la variation des fréquences spectrales soit inobservable à l'échelle de l'âge de l'univers pour des valeurs typiques du potentiel (si cela a du sens)]. L'attitude actuelle de Weyl à cet égard est la suivante : le processus idéal de transport [transfert ?] congruent des longueurs d'univers [intervalles ?] tels que déterminés par (472) n'a rien à voir avec le comportement réel des règles et des horloges ; la métrique du champ [metric field] ne doit pas être défini à partir des informations obtenues par ces instruments de mesure. [Commenter cette attitude de Weyl, cf Chr. Eckes] Dans ce cas, les quantités g_{ik} et ϕ_i ne sont par définition plus observables, au contraire de l'élément de longueur ds^2 de la théorie d'Einstein. Ce [relinquishment] semble avoir des conséquences très sérieuses. Alors qu'il n'y a plus maintenant de contradiction directe avec l'expérience, la théorie apparaît cependant avoir perdu, d'un point de vue physique, de son pouvoir de conviction inhérent.³⁸⁷ Par exemple le lien entre l'électromagnétisme et la métrique d'univers n'est plus essentiellement physique, mais purement formel, car il n'y a plus de connexion immédiate entre les phénomènes électromagnétiques et le comportement des règles et des horloges. Il y a seulement une inter-relation entre les premiers [les phénomènes électromagnétiques] et le processus idéal défini mathématiquement comme le transport parallèle [congruent transference] de vecteurs. De là, il existe une preuve formelle et pas physique du lien entre métrique d'univers et électricité. C'est en contradiction totale avec le lien entre métrique d'univers et gravitation, pour lequel une confirmation empirique forte est fournie par l'égalité entre masses gravitationnelle et inertielle et qui est une conséquence rigoureuse du principe d'équivalence et de la relativité restreinte [Commenter ce point].

(γ) *Le calcul tensoriel dans la géométrie de Weyl.* Avant d'écrire les équations du champ, nous devons fixer les règles formelles qui permettent d'obtenir des équations invariantes de jauge. Il est clair que dans la théorie de Weyl, le concept de tenseur doit être modifié

³⁸⁶ A. Einstein, *S.B. preuss. Akad. Wiss.* (1918) 478, contient la réponse de Weyl.

³⁸⁷ A. Einstein considère que même dans cette version, la théorie ne supportera pas la confrontation à la réalité (*Phys. Z.*, **21** (1920) 651 ; Cf. note de bas de page 18, p. 4, *ibid.*).

de manière telle qu'un système d'équations qui exprime l'annulation de toutes les composantes d'un tenseur doit non seulement rester invariant dans un changement arbitraire des coordonnées, mais aussi pour un changement de jauge (477) arbitraire. De fait, il apparaît commode de ne désigner comme tenseurs que les quantités qui sont [merely] multipliées par une puissance de λ , λ^e , dans la transformation (477); e étant appelé le poids du tenseur. Ainsi, g_{ik} est de poids +1, g^{ik} de poids -1, $\sqrt{-g}$ dans un univers quadri-dimensionnel est de poids 2, Γ^r_{ik} est, d'après (64) ou (476), absolument invariant de jauge, i.e. de poids 0. p. 197

Toutes les opérations qui sont basées seulement sur le concept de transport parallèle peuvent être naturellement transposées à la géométrie de Weyl; nous avons juste à utiliser les expressions (66), (467) à la place de (66), (??) pour Γ^r_{ik} . Ainsi les lignes géodésiques peuvent être définies ici aussi par la condition que leur tangente reste parallèle à elle-même; elles satisfont à nouveau les équations (??). Les équations (??) ($u_i u^i = \text{const.}$) cependant doivent être remplacées par

$$\frac{d}{d\tau}(u_i u^i) = -(u_i u^i)(\phi_k u^k)$$

en raison de (472) et (474). Si en particulier $u_i u^i = 0$ en un point d'une ligne géodésique, cette relation restera toujours valable. Cela rend possible la détermination des lignes géodésiques nulles [de genre lumière?]. La propriété des lignes géodésiques d'être aussi les lignes les plus courtes n'est plus vraie dans la géométrie de Weyl parce que le concept de longueur d'une courbe n'y a plus de sens. Comme dans le paragraphe § 16, nous obtenons le tenseur de courbure en termes de déplacement parallèle d'un vecteur le long d'une courbe fermée,

$$R^h_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^h_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^h_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^h_{k\alpha} \Gamma^\alpha_{ij} - \Gamma^h_{j\alpha} \Gamma^\alpha_{ik}. \quad (86)$$

Les composantes dans cette équation sont de poids 0, et les composantes de R_{hijk} sont alors de poids 1. Les relations de symétrie de ce tenseur de courbure sont cependant différentes de celles du tenseur de Riemann qui sont déterminées par (??). Weyl a discuté cela en détail et a aussi calculé explicitement l'expression (86) pour le tenseur de courbure par substitution de (476). Comme au § 17, nous obtenons le tenseur de courbure contracté R_{ik} , (??), dont les composantes covariantes sont de poids 0, et l'invariant R , (??), de poids -1. Finalement, toutes les opérations des §§ 19 et 20 restent valables dans la théorie de Weyl, pourvu premièrement que les composantes différenciées [differentiated components] de tenseurs et densités tensorielles soient de poids 0 et deuxièmement que les expressions (66) et (476) soient utilisées pour les quantités Γ^r_{ik} . On remarquera qu'il est parfaitement suffisant pour établir les preuves de la plupart des théorèmes de remarquer que le concept de transport parallèle selon (64) est déterminé de manière invariante à l'aide des Γ^r_{ik} sans avoir à connaître la relation des ces derniers aux quantités métriques g_{ik} , ϕ_i . Dans les dernières versions de sa théorie, Weyl a insisté sur ce point en développant sa géométrie en trois étapes. Dans la première, il a démontré les théorèmes qui sont valables dans une variété arbitraire [emploi de manifold ici]; dans la seconde, les relations basées sur le concept de transport parallèle (appelé « connexion affine » par Weyl); et finalement les conséquences résultant de l'existence des deux formes métriques fondamentales : la quadratique $g_{ik} dx^i dx^k$ (gravitation) et la linéaire $\phi_i dx^i$ (électricité). L'inter-relation de ces deux types de phénomènes, qui étaient séparés dans les théories antérieures, trouve une expression formelle dans le fait les g_{ik} et ϕ_i apparaissent simultanément dans les composantes géodésiques Γ^r_{ik} et par conséquent dans la plupart des autres équations invariantes de jauge. p. 198

Les modifications ou extensions, dans la théorie de Weyl, des affirmations sur les transformations infinitésimales de coordonnées et intégrales invariantes que nous avons faites au

§ 23 sont d'une importance particulière pour les applications physiques. Tout d'abord les changements de jauge infinitésimaux apparaissent sur un pied d'égalité avec les transformations infinitésimales de coordonnées. De (477) nous déduisons, à l'aide de $\lambda = 1 + \epsilon\pi(x)$,

$$\delta g_{ik} = \epsilon\pi g_{ik}, \quad (\delta g^{ik} = -\epsilon\pi g^{ik}), \quad \delta\phi_i = -\epsilon\frac{\partial\pi}{\partial x^i}. \quad (482)$$

De plus, il est évident dans la théorie de Weyl que seules les densités scalaires $\mathfrak{W}$ de poids 0 conduisent à des intégrales invariantes $\int \mathfrak{W} dx$. Les scalaires correspondants sont de poids -2 , en raison du facteur $\sqrt{-g}$ dans un univers quadri-dimensionnel. Les scalaires de ce type vont jouer un rôle important dans ce qui suit. Parmi ceux-ci, il y a quatre combinaisons rationnelles des composantes du tenseur de courbure,³⁸⁸

$$\frac{1}{2}F_{ik}F^{ik}, \quad R_{hijk}R^{hijk}, \quad R_{ik}R^{ik}, \quad R^2. \quad (483)$$

L'invariant R qui apparaît dans le principe d'action de la théorie d'Einstein est toutefois de poids -1 . Weyl l'a souligné car les densités scalaires (483) sont de poids 0, un univers quadri-dimensionnel ayant un avantage distinct par rapport à une variété métrique de dimension différente. En fait, dans une telle variété, aucune densité scalaire de poids 0 et ayant une telle structure simple ne pourrait être construite.

(δ) *Equations du champ et principe d'action. Conséquences physiques.* Nous devons maintenant chercher des lois physiques invariantes de jauge. Selon Weyl, tous les processus physiques sont réductibles à des effets électromagnétiques et gravitationnels. Nous avons ainsi à disposition les quatorze quantités d'état indépendantes ϕ_i et g_{ik} . Mais comme l'invariance de jauge a maintenant été ajoutée à l'invariance par changement de coordonnées, la solution générale des équations de champ doit contenir cinq fonctions arbitraires au lieu de quatre; il doit aussi y avoir cinq identités entre les quatorze équations de champ. Nous verrons que quatre de ces identités expriment la loi de l'énergie-impulsion, de manière analogue à celles de la théorie d'Einstein, et que la cinquième identité exprime la conservation de la charge.

Nous allons tout d'abord essayer de conserver les équations de Maxwell et d'identifier le tenseur énergie de matière avec celui de Maxwell et nous remplacerons seulement le tenseur de courbure de la géométrie riemannienne dans les équations d'Einstein par celui de la théorie de Weyl. Nous verrons que seule la première « prescription » est possible, [mais pas la seconde]. Etudions pour commencer la théorie de Maxwell. Le premier groupe d'équations de Maxwell est automatiquement satisfait, comme cela a déjà été souligné. Mais comme l'intensité du champ F_{ik} est de poids 0, la même propriété sera vraie, dans un univers quadri-dimensionnel, des composantes contravariantes $\mathfrak{F}^{ik}$ de la densité tensorielle correspondante. Les équations

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{ik}}{\partial x^k} = \mathfrak{s}^i$$

sont alors invariantes de jauge : les équations de Maxwell restent inchangées lorsque g_{ik} est remplacée par λg_{ik} . Le théorème de Bateman selon lequel les équations de Maxwell sont invariantes par transformations conformes (§ 28) est contenu dans cette affirmation comme un cas particulier. De telles transformations changent en effet les valeurs normales δ_i^k , que prennent les g_{ik} en relativité restreinte, en $\lambda\delta_i^k$. L'invariance de jauge des équations de Maxwell est liée au fait que l'intégrale d'action

$$J = \int \frac{1}{4} F_{ik} \mathfrak{F}^{ik} dx$$

³⁸⁸R. Weitzenböck a montré dans *Wiener Ber., math. nat. Kl.*, IIa, **129** (1920) 683 et 687 que les invariants

d'où elles découlent, est elle-même invariante de jauge. Nous souhaitons noter à ce niveau que la raison de l'annulation apparemment accidentelle du scalaire du tenseur énergie de Maxwell [de quoi parle-t-il ?] (paragraphe 30, équation (??)) trouve aussi son origine dans l'invariance de jauge de cette intégrale d'action. Une variation de l'intégrale d'action, en maintenant les F_{ik} constants, conduit à

$$\delta J = \int \mathfrak{S}_{ik} \delta g^{ik} dx,$$

suivant § 55. Si l'on demande maintenant la condition que J soit inchangée dans un changement de jauge infinitésimal, $\lambda = 1 + \epsilon\pi(x)$, on déduit directement de (482) que $\mathfrak{S}_i{}^i = 0$, comme attendu.³⁸⁹

Au contraire de la théorie de Maxwell, la situation est très différente lorsqu'on vient à traiter de la théorie d'Einstein. Pour commencer, la loi selon laquelle les lignes d'Univers des particules massives et les rayons lumineux sont des géodésiques n'est plus généralement valide dans la théorie de Weyl. Une particule massive ne se déplace le long d'une ligne d'Univers géodésique qu'en l'absence de champs électromagnétiques et pour les rayons lumineux, l'équation des lignes géodésiques perd son sens pour la raison suivante. Même en l'absence de champs gravitationnels, les termes qui contiennent le quadri-vecteur potentiel φ_i introduiront dans l'équation de la ligne géodésique des termes oscillants à la fréquence [période] de la lumière. L'équation invariante de jauge

$$g_{ik} dx^i dx^k = 0$$

du cône de lumière [null cone] reste seule valable pour les lignes d'univers des rayons lumineux.

(111)

Commentaires

- (1) L'électrodynamique ordinaire laisse le potentiel en partie indéterminé, sa valeur dans l'absolu n'étant fixée qu'à un choix de jauge près, $\frac{\partial \varphi^k}{\partial x^k} = 0$ (jauge de Lorenz). La théorie de Mie ne possède donc pas cette liberté de choix de jauge.
- (2) Pauli utilise ici la convention selon laquelle le couplage aux sources s^i est décrit dans le lagrangien par un terme $-2s^i \varphi_i$ de sorte que la densité de courant est donnée par $s^i = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i}$ là où la convention actuelle ne comprend pas le facteur 1/2. Il utilise aussi pour la contribution du champ libre (dans le cas de Maxwell) l'expression (230) $\frac{1}{2} F_{ik} F^{ik}$, elle aussi multipliée par un facteur 2 par rapport au choix actuel, de sorte que les équations de mouvement ont la forme habituelle (208), $\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = s^i$.
- (3) Il s'agit là de la manière qu'a aussi utilisée Weyl pour déterminer les lois de conservation plutôt que par l'usage du théorème de E. Noether.

donnés ici sont les seuls de ce type.

³⁸⁹ Les ϕ_i ne doivent pas être variés ici, parce qu'ils interviennent dans J sous la forme de la combinaison invariante de jauge F_{ik} . En lien avec cette observation, la théorie de Nordström de la gravitation fournit une application intéressante. Comme indiqué au paragraphe 56, l'élément de longueur de cette théorie est de la forme

$$ds^2 = \Phi \sum_i (dx^i)^2.$$

Il découle tout d'abord de l'invariance de jauge de équations de Maxwell que ces dernières restent également valables en présence de champs gravitationnels dans la théorie de Nordström, de sorte que les champs gravitationnels sont sans influence sur les processus électromagnétiques (e.g. absence de déviation

des rayons lumineux). Au contraire, en raison de l'annulation du scalaire énergie de Maxwell [??] l'énergie électromagnétique n'engendre pas de champ gravitationnel dans la théorie de Norström, puisque les équations du champ gravitationnel ne comportent que le scalaire énergie. On voit avec ce qui précède que cette circonstance a aussi comme fondement formel l'invariance de jauge des équations de Maxwell.

Note 20. (Fr. p. ???)³⁹⁰

Ici l'invariant [voir Eq. (54a), p. 33]] [Les numeros de page se réfèrent à l'édition anglaise]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(F_{23}F_{14} + F_{31}F_{24} + F_{12}F_{34}) = \frac{1}{4}F_{ik}F^{*ik}$$

a été oublié par erreur. La quantité n'est pas invariante par rapport aux réflexions des coordonnées spatiales ($x'_a = -x_a$ pour $a = 1,2,3$), mais change de signe par cette transformation (pseudo-scalaire). Comme les lagrangiens que l'on rencontre dans la nature sont invariants par réflexion spatiale, seul *le carré de cette quantité* peut apparaître. [Nous sommes avant l'article de Lee et Yang sur la brisure de symétrie de parité par l'interaction faible.] C'est réellement le cas dans l'application de la théorie quantique du positron à la polarisation du vide dans des champs électrique et magnétique externes homogènes, comme cela a été montré par W. Heisenberg et H. Euler, *Z. Phys.*, **98** (1936) 714. Cela joue aussi un rôle dans l'électrodynamique non linéaire de M. Born, *Proc. Roy. Soc. A***143** (1934) 410 et de M. Born et L. Infeld, *Proc. Roy. Soc. A***144** (1934) 425, **147** (1934) 552, **150** (1935) 141.

Les autres invariants mentionnés sous (2) et (4), p. 189 ont aussi été totalement abandonnés en raison de leur non invariance de jauge.

Note 21. (pp. 192, 202 et 205)

Après que les propriétés des négatons et positons [électrons et positrons ?] se sont avérées exactement symétriques, l'antiproton négatif a été trouvé expérimentalement.[†] Tous les arguments dans le texte qui sont basés "sur une asymétrie des deux formes d'électricité" ont donc été éliminés. de leur non invariance de jauge.

Note 22. (pp. 192-202) **Théorie de Weyl**

Bien qu'il n'y ait jamais eu de raison empirique de croire que les longueurs et les durées de règles et d'horloges dépendent de leur préhistoire (voir § 65(β)), la situation théorique a aussi évolué significativement depuis l'élaboration de la mécanique quantique. Dans cette théorie, l'équation d'onde complexe décrivant la matière électriquement chargée (la fonction d'onde ψ peut avoir une ou plusieurs composantes) autorise [les transformations de] groupe

$$\varphi_i' = \varphi_i - i\frac{\hbar c}{\epsilon} \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad \psi' = \psi e^{if(x)} \quad (1)$$

ce qui est analogue à la transformation (477) de la théorie originale de Weyl, mais avec un exposant imaginaire dans ψ à la place de l'exposant réel dans g_{ik} ($\hbar$ = constante de Planck

³⁹⁰ All. p. ???, An. p. 189

[†]O. Chamberlain, E. Segré, C. Wiegand and Th. Ypsilantis, *Phys. Rev.*, **100** (1955) 947.

divisée par 2π , e = charge électrique élémentaire). De plus, le lien de la loi de conservation de la charge électrique avec le nouveau groupe est le même qu'avec l'ancien.

London,[‡] et Weyl lui-même^{||} ont tous deux reconnu ce fait rapidement après la découverte de la mécanique ondulatoire [Prévoir ici un comment sur Schrödinger et Fock en suivant le point de vue de O'Raffertaigh]. Depuis lors, le terme de groupe de jauge est employé pour désigner le groupe (1) en mécanique ondulatoire, en référence comme origine historique à la théorie de Weyl sur les longueurs non-intégrables.

Il n'y avait cependant plus aucune raison de croire à une non intégrabilité des longueurs et Weyl lui-même a affirmé l'échec de son ancienne théorie. Il semble y avoir maintenant un accord général pour que les g_{ik} eux-mêmes, et non uniquement leurs rapports, restent inchangés lorsqu'un gradient est ajouté aux potentiels électromagnétiques.[†]

[‡]F. London, *Z. Phys.* **42** (1927) 375.

^{||}H. Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (Leipzig 1928 ; 2nde édition, 1931) ; *Z. Phys.* **56** (1929) 330 ; Rouse Ball lecture 'Geometry and Physics', *Naturwissenschaften* **19** (1931), pp 49-58. Report '50 Jahre Relativitätstheorie', *Naturwissenschaften* **38** (1951), 73.

[†]Indépendamment de la transformation des potentiels électromagnétiques, on peut considérer la transformation conforme $g'_{ik} = \lambda g_{ik}$ avec une fonction arbitraire $\lambda(x)$ [voir p. 81 et 199 pour les équations de Maxwell]. R. Bach, *Math. Z.* **9** (1921) 110 (voir aussi C. Lanczos, *Ann. Math., Princeton* **39** (1938) 842) a montré qu'il est mathématiquement possible de construire des équations de champ possédant cette invariance en utilisant dans le principe d'action une densité scalaire du second degré dans les composantes du tenseur de courbure conforme [pour ce dernier, voir H. Weyl, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-naturw. Kl.*, (1921) 99].

A un moment, Einstein a aussi considéré les équations de gravitation en prenant en considération l'invariance conforme [*S.B. preuss. Akad. Wiss.* (1921) 261]. Ce point de vue a cependant rapidement été abandonné car il ne semble pas avoir de signification physique. [Prévoir commentaire sur des tentatives récentes d'explication cosmologiques alternatives à la matière noire ou à l'énergie sombre dans le contexte de la gravité conforme de Weyl.]